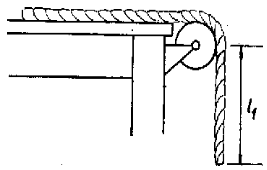
I. megoldás. Legyen a kötél egységnyi hosszának tömege m. Az asztalról lelógó kötél súlya $G = l_1 mg$, a súrlódási erő $P_\mathrm{s} = (l_0 - l_1)\mu mg$. A megindulás feltétele, hogy $G > P_\mathrm{s}$ teljesüljön. Ebből átrendezve

(1) $$l_1 > \frac{l_0\mu}{1+\mu}.$$



A kötél kérdezett sebességét a legkönnyebben az energiamegmaradás elve alapján számíthatjuk ki.

A helyzeti energia megváltozása a súlypont süllyedésének következménye. Az energia kezdeti értéke

$$E_1 = -mgl_1(l_1/2) = -mgl_1^2/2,$$

végső értéke

$$E_2 = -mgl_0^2/2,$$

ha az asztal lapját tekintjük a vonatkoztatási szintnek. Az energianyereség

$$\Delta E = \frac{mg}{2}(l_0^2 - l_1^2).$$

A mozgás során ez súrlódási hővé, ill. mozgási energiává alakul:

$$E_\mathrm{kin} = l_0 m v^2/2,$$
$$E_\text{súrl} = P_{s\ \text{átl}}(l_0 - l_1).$$

A súrlódási erő a mozgás folyamán egyenletesen változik, átlagértéke

$$P_{s\ \text{átl}} = (l_0 - l_1)\mu mg/2,$$

evvel számolva megkapjuk a súrlódási veszteséget. Tehát a

$$\Delta E = E_\mathrm{kin} + E_\text{súrl}$$

egyenletből a fenti kifejezések behelyettesítésével v-t kifejezhetjük:

$$v = \sqrt{g(l_0 - l_1)[l_1 + l_0 - \mu(l_0 - l_1)]/l_0}.$$

Ha a kötél saját súlya alatt éppen megindul, vagyis (1)-ben a határeset érvényes, a sebesség

$$v_\text{határ} = \sqrt{gl_0\frac{1}{1+\mu}}.$$

Simon János (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

II. megoldás. A kötél sebességét a mozgásegyenletek segítségével is kiszámíthatjuk. Minthogy a gyorsító erő a mozgás folyamán egyenletesen változik, számolhatunk ennek átlagával, mely a kezdeti és végső érték számtani közepe lesz. A nehézségi erő átlaga

$$G_\text{átl} = mg\frac{l_1 + l_0}{2},$$

a súrlódási erő átlaga

$$P_{s\ \text{átl}} = mg\mu\frac{l_0 - l_1}{2}.$$

A gyorsító erő

$$P_\mathrm{gy} = \frac{mg}{2}[l_1(1+\mu) + l_0(1-\mu)],$$

a gyorsulás $a = P_\mathrm{gy}/\mathrm{m}$, innen, alkalmazva a $v = \sqrt{2as}$ összefüggést, átrendezéssel kapjuk a megoldást.

Jung József (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

A lektor (G. P.) megjegyzései:

1. A feladat megoldásának képleteiben több hiba is szerepelt. A fenti megoldás a javított változat.

2. A II. megoldás a mozgás során változó nagyságú gyorsulás átlagos értékének segítségével határozza meg a kötél sebességét. A gyorsulás a megtett út lineárisan változó függvénye, az *út szerinti* átlaga tehát a kezdeti és a végső gyorsulás számtani közepe. Ha ekkora, állandó nagyságú gyorsulás $v = \sqrt{2as}$ képletéből számoljuk ki a sebességet, helyes eredményt kapunk.

Ez a gondolatmenet azonban félrevezető is lehet. A gyorsulás például az eltelt időnek bonyolult, *nem lineáris* függvénye. Ha a számtani középpel meghatározott „átlagos gyorsulás” segítségével az ismert $t = \sqrt{2s/a}$ összefüggéssel számolnánk ki a mozgás időtartamát, hibás eredményt kapnánk.

3. A feladat közölt megoldása még a képlethibák kijavítása után is *elvileg hibás*! Ha a mozgás a leírt módon menne végbe, akkor az asztalon csúszó kötél jobb oldali szélének vízszintes irányú sebessége (és impulzusa) a kicsiny csiga negyedkörén áthaladva nagyon rövid idő alatt nullára csökkenne. Ehhez nagyon nagy, balra mutató erő kellene hasson a kötéldarabra. A kötelet feszítő erő véges nagyságú, ez tehát nem okozhatja a kötél darabjainak hirtelen (határesetben pillanatszerű) sebességváltozását.

Ténylegesen azt történik, hogy a kötél elválik a csigától, azt elhagyva kezdetben vízszintesen mozog tovább, és a „függőleges” részen szabálytalan hullámok alakulnak ki. Ennél a bonyolult mozgásnál a feladat megoldásában közölt energetikai összefüggések nyilván nem teljesülnek, így az azokból levont következtetés is hibás!

A kötélhullámok kialakulását úgy lehet megakadályozni, hogy a csiga helyett egy rögzített, negyedkör alakú, súrlódásmentesnek tekinthető csődarabon vezetjük keresztül a kötelet. A kötélre ható, bal felé mutató erőt a cső „külső íve” által kifejtett nyomóerő biztosítja.