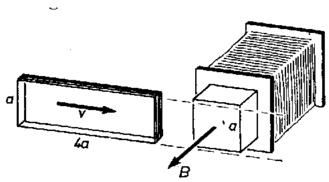
Számítsuk az időt attól a pillanattól, amikor a mozgó tekercs az elektromágnest a távolságnyira megközelítette. Ekkor világos, hogy az elektromágnes indukciója az alábbi módon fog az időben változni:

$$B = \frac{B_1 v}{6a} \cdot l. \tag{1}$$



1. ábra

Bontsuk az egész folyamatot négy szakaszra:

$$\begin{array}{rl} \text{I.} & 0 < t < a/v \\ \text{II.} & a/v < t < 2a/v \\ \text{III.} & 2a/v < t < 5a/v \\ \text{IV.} & 5a/v < t < 6a/v \end{array}$$

Miért hat elektromágneses erő a mozgó tekercsre? A mozgó tekercsben feszültség ébred, mert mozgása során a körülfogott erővonalak száma változik. Ennek a változásnak két oka van: egyik ok az, hogy a mozgó tekercs erővonalakat metsz. Ez az ok fennáll a II. és a IV. szakaszban, mert jó közelítéssel az elektromágnes indukciója csak a vasmag előtt különbözik nullától. A változás másik oka az, hogy a már körülfogott részben is új erővonalak születnek azáltal, hogy az elektromágnes indukciója az időben változik. Ez az ok csak az I. szakaszban nem érvényesül, hiszen akkor a tekercs még nincs is az elektromágnes előtt. Megállapíthatjuk tehát, hogy a II., a III. és a IV. szakaszban a mozgó tekercsben feszültség ébred, és mivel rövidre van zárva, áram folyik. (Ezután a tekercs ismét elhagyja az elektromágnest, ezért áram nem folyik benne.)

A tekercsben folyó áram az elektromágnes terében van, ezért erő fog rá hatni. A vízszintes ágakban azonos nagyságú, de ellentétes irányú áramok folynak, amelyek azonos mágneses térben vannak, így a rájuk ható erők eredője nulla. A függőleges ágak azonban nem egyszerre vannak a mágneses térben, azért a rájuk ható erők eredője nem nulla. A függőleges ágak a II. és a IV. szakaszban vannak az elektromágnes előtt, ezért megállapíthatjuk, hogy csak ezekben a szakaszokban hat elektromágneses erő a mozgó tekercsre.

A következőkben a II. szakasszal foglalkozunk. Először azt határozzuk meg, hogyan függ az időtől a tekercsben ébredő feszültség. Ehhez azt kell tudnunk, hogy hogyan változik a mozgás során a körülfogott erővonalszám (fluxus, Φ), hiszen az indukált feszültség nagysága egyenlő a fluxus időegység alatti megváltozásával, vagyis N menet esetén:

$$U = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{2}$$

A fluxus egyenlő a mágneses indukció és a hatásos felület szorzatával, ha – mint esetünkben is – az indukció vektora a felületre merőleges. Bennünket azonban a fluxus kis változása érdekel. Megmutatjuk, hogy ez két tagból áll: az egyik az indukció, a másik a felület megváltozását írja le. Jelöljük a hatásos felületet A-val, akkor

$$\Delta\Phi = \Delta(BA) = (B + \Delta B)(A + \Delta A) - BA \approx \Delta B \cdot A + B \cdot \Delta A. \tag{3}$$

Itt a $\Delta B \cdot \Delta A$ tagot, mint másodrendű kicsiny mennyiséget elhanyagoltuk.

(3) alapján tehát ahhoz, hogy a $\Delta\phi/\Delta t$-t megkaphassuk, ismernünk kell a $\Delta B/\Delta t$ és a $\Delta A/\Delta t$ mennyiségeket. Ezek könnyen megkaphatók, hiszen B is és A is lineárisan függ az időtől, ezért időegységre eső megváltozásuk egyenlő lesz a lineáris függvény arányossági tényezőjével. Konkrétan (1) alapján

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_1 v}{6a}, \quad \text{állandó.} \tag{4}$$

A II. szakaszban pedig A úgy változik, hogy $t = a/v$-ben $A = 0$, és $t = 2a/v$-ben $A = a^2$, tehát

$$A = av\left(t - \frac{a}{v}\right), \tag{5}$$

(5) alapján pedig

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = av, \quad \text{állandó.} \tag{6}$$

(1), (2), (4), (5) és (6)-ot (3)-ba helyettesítve az indukált feszültség nagyságára kapjuk, hogy

$$U = \frac{B_1 v^2 N}{3} t - \frac{B_1 v^2 N a}{6}. \tag{7}$$

A rövidrezárt tekercsben indított áram pedig:

$$I = \frac{1}{R}\left(\frac{B_1 v^2 N}{3} t - \frac{B_1 v^2 N a}{6}\right). \tag{8}$$

Magyarázatra szorul az áram iránya. Az indukciótörvény szerint (amelynek a Lenz-szabály következménye) az ábrán szereplő elrendezés esetén, tehát amikor az indukcióvektor felénk mutat, növekvő fluxus az óramutató járásával egyező irányú áramot indít. Mivel a fluxusváltozás mindkét tagja pozitív, az áram a tekercs jobb oldali ágaiban felfelé folyik, és így az ezekre ható erő a jobbkéz-szabály szerint balra mutat, tehát fékező irányú. Az N ágra összesen ható erő nagysága:

$$F = NIaB, \tag{9}$$

ahová (8)-ból behelyettesítve az áram értékét, rendezés után

$$F_{\mathrm{II}} = \frac{B_1^2 v^3 N^2}{18R} t^2 - \frac{B_1^2 v^2 N^2 a}{36R} t. \tag{10}$$

Az áttekinthetőség kedvéért vezessük be az erő helyett a φ dimenziómentes „redukált erőt” úgy, hogy az erőt a $\dfrac{B_1^2 N^2 v a^2}{6R}$ egységekben mérjük, az idő helyett pedig a szintén dimenziómentes τ „redukált időt” az a/v időegység használatával. Ekkor a redukált erő így függ a redukált időtől:

$$\varphi_{\mathrm{II}} = \frac{1}{3}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau. \tag{11}$$

A IV. szakasz teljesen hasonló módon tárgyalható. Itt (5) helyébe az

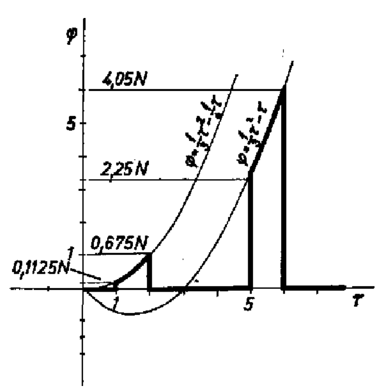
$$A = av\left(\frac{6a}{v} - t\right) \tag{12}$$

lép. Ennek felhasználásával végeredményben az erőre kapjuk, hogy

$$F_{\mathrm{IV}} = \frac{B_1^2 v^3 N^2}{18R^2} t^2 - \frac{B_1^2 v^2 N^2 a}{6R} t, \tag{13}$$

vagy ismét használva a redukált mennyiségeket:

$$\varphi_{\mathrm{IV}} = \frac{1}{3}\tau^2 - \tau. \tag{14}$$



2. ábra

Látható, hogy a 2. ábra szerint (14) a IV. szakaszban szintén pozitív, tehát balra mutató erőt ír le. Ez azért van így, mert a IV. szakaszban a II. szakasszal ellentétben a fluxus csökken. Ez a tekercsben a II. szakaszéval ellentétes áramot fog indítani, amely azonban a most érdekes bal oldali ágakban felfelé fog folyni, tehát végeredményben a II. szakaszéval azonos irányú erőt fog eredményezni.

A mozgó tekercs $t = a/v$-ben éri el az elektromágnest, és $t = 6a/v$-ben hagyja el azt. Ez a $\tau = 1$, ill. a $\tau = 6$ redukált időknek felel meg. (11) és (14)-be helyettesítve a $\varphi_{\mathrm{II}} = 1/6$, ill. a $\varphi_{\mathrm{IV}} = 6$ redukált erőket adja.

A feladatban megadott numerikus értékeket használva a redukált erő egysége:

$$\frac{B_1^2 N^2 v a^2}{6R} = \frac{10^{-4}\ \mathrm{V^2s^2/m^4} \cdot 36 \cdot 10^4 \cdot 18\ \mathrm{m/s} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-2}\mathrm{m^2}}{6 \cdot 10} = \tag{15}$$
$$= 0{,}675\ \mathrm{Ws/m} = 0{,}675\ \mathrm{N},$$

így a belépés pillanatában ható erő $F_{\mathrm{be}} = 0{,}1125$ N, a kilépéskor ható erő pedig $F_{\mathrm{ki}} = 4{,}05$ N.

Nagy Dénes Lajos

Megjegyzések. 1. Érdekes a B változásából adódó indukciós hatás. Mindhárom esetben (ti. a II., a III. és a IV. szakaszban) a tekercsben folyó indukált áram hatásával a mozgó tekercsen átmenő fluxusváltozást (nem a fluxust!) igyekszik csökkenteni. A II. és a IV. szakaszban ez két úton valósulhat meg: egyrészt az eredeti mágneses teret igyekszik egyengetni, másrészt a tekercset vagy ki akarja taszítani az elektromágnes teréből, vagy vissza igyekszik tartani. Azonban a III. szakaszban a fluxusváltozás csökkentése csak egyféleképpen valósulhat meg: az eredeti mágneses tér gyengítése által, ezért ez esetben B változásából nem származik erő a tekercsre. (Mint láttuk, a mozgás folytán sem lép fel erő.)

Wiedemann László

2. Ha figyelmen kívül hagyjuk, hogy a fluxus azért is változik, mert B-t növeljük, akkor ez azt jelenti, hogy (3) első tagját elhanyagoltuk. Speciálisan ez meg is tehető a két kérdezett konkrét időpillanatban, ugyanis a térben való be-, ill. kilépés pillanatában a tekercs hatásos felülete $A = 0$, és így (3) első tagja csakugyan eltűnik. Ezért a feladat két megoldója, így számolva, numerikusan helyes eredményt kapott.