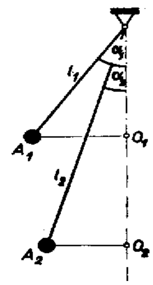
Az ábra A_1 és A_2 pontjainak vízszintes síkon vett vetületei harmonikus rezgőmozgást végeznek, ha a kitérítés szöge elég kicsiny.



A mozgásegyenlet a következő:

$$x = AO \cdot \sin(\omega t + \gamma),$$

ahol $\omega = \sqrt{g/l}$ az inga lengési frekvenciája, γ a fázisszög, jelen esetben $\pi/2$, mert a szélső helyzetből indulunk, valamint $AO = l \sin\alpha \approx l\alpha$ az amplitudó. Az ábrából látható, hogy $x = l\sin\beta \approx l\beta$, ahol β a mindenkori kitérés szöge. Innen

$$\beta = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \pi/2\right) = \alpha \cos\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t.$$

A kétféle inga akkor lesz fedésben, ha $\beta_1 = \beta_2$, vagyis

$$\alpha_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l_1}} \cdot t = \alpha_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l_2}} \cdot t. \tag{1}$$

A fenti egyenletet teljes általánosságban algebrai úton nem tudjuk megoldani, de pl. grafikus módszerrel célt érhetünk. Speciális esetekben könnyebb a dolgunk, ilyen az alábbi kettő is.

1. $T_1 = 2T_2$, vagyis $\omega_2 = 2\omega_1$. Minthogy $\cos^2\omega_1 t = (1 + \cos 2\omega_1 t)/2$, (1) így írható:

$$\frac{1 + \cos 2\omega_1 t}{2} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cos 2\omega_1 t\right)^2,$$

innen

$$\cos 2\omega_1 t = \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} \pm \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2^2} + 2}.$$

Legyen $\alpha_1 = \alpha_2$, ekkor $\cos 2\omega_1 t = 1;\ -1/2$, vagyis

$$2\omega_1 t = 0 + 2k\pi, \qquad t_a = k\frac{\pi}{\omega_1} = \frac{k}{2} \cdot T_1,$$

illetőleg

$$2\omega_1 t = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \qquad t_{b1} = (3k+1)\frac{\pi}{3\omega_1} = \frac{3k+1}{6} \cdot T_1,$$
$$2\omega_1 t = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \qquad t_{b2} = (3k+2)\frac{\pi}{3\omega_1} = \frac{3k+2}{6} \cdot T_1.$$

Eszerint az ingák sorban a

$$0;\quad \frac{T_1}{6};\quad \frac{T_1}{3};\quad \frac{T_1}{2};\quad \frac{2T_1}{3};\quad \frac{5T_1}{6};\quad T_1;\quad \ldots$$

időpontokban lesznek fedésben.

2. $T_1 = 3T_2$, ekkor (1)-ből a $\cos 3\omega_1 t = 4\cos^3\omega_1 t = 3\cos\omega_1 t$ azonosság fölhasználásával kapjuk:

$$\alpha_1 \cos\omega_1 t = \alpha_2(4\cos^3\omega_1 t - 3\cos\omega_1 t).$$

Innen egyrészt $\cos\omega_1 t = 0$, másrészt $\cos\omega_1 t \neq 0$-val végigosztva

$$4\alpha_2 \cos^2\omega_1 t = \alpha_1 + 3\alpha_2,$$
$$\cos\omega_1 t = \pm\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\alpha_1}{4\alpha_2}}.$$

Ha $\alpha_1 = \alpha_2$, $\cos\omega_1 t = \pm 1$, és

$$\omega_1 t = 2k\pi, \qquad t_{b1} = 2k\frac{\pi}{\omega_1} = k\cdot T_1,$$
$$\omega_1 t = (2k+1)\pi, \qquad t_{b2} = (2k+1)\frac{\pi}{\omega_1} = \frac{2k+1}{2}\cdot T_1,$$

ehhez hozzávéve az előbb kizárt esethez tartozó megoldást:

$$t_a = (2k+1)\frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{2k+1}{4}\cdot T_1,$$

kapjuk a fedés időközeire:

$$0; \quad \frac{T_1}{4}; \quad \frac{T_1}{2}; \quad \frac{3T_1}{4}; \quad T_1; \quad \ldots$$

Két fedés között tehát $T_1/4$ idő telik el.

Herendi Ágnes (Bp. Toldy F. g. IV. o. t.)
dolgozata alapján