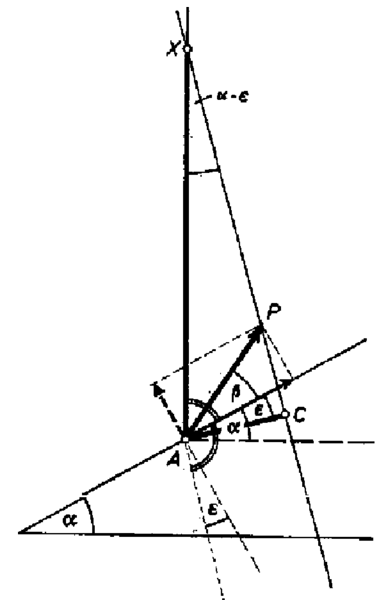
I. megoldás. A megoldás történhet a Lapok 1966. évi 7. (1966/10.) számában a 85. oldalon olvasható eljárás szerint. P erő lejtőre merőleges összetevője $P\sin\beta$ (ezzel ellentétes irányú a lejtő anyaga által kifejtett kényszererő). A tárgy és a lejtő között az összenyomó erő $mg\cos\alpha - P\sin\beta$ és a surlódási erő $\mu(mg\cos\alpha - P\sin\beta)$. Leeresztéskor a surlódási erő segít tartani a tárgyat, tehát P erő lejtőmenti összetevője egyenlő a súly lejtőmenti összetevőjének és a surlódási erőnek a különbségével (1. ábra):

$$P\cos\beta = mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha - P\sin\beta).$$



1. ábra

Innen az egyensúlyban tartáshoz szükséges erő:

(1) $$P = mg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta}.$$

Bevezetve a surlódási határszöget, $P = \operatorname{tg}\varepsilon$ segítségével:

(2) $$P = mg\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos(\beta+\varepsilon)}.$$

Természetesen csak $\alpha > \varepsilon$ esetében vizsgáljuk a kérdést, különben a test lefelé vonszolásához kellene erőt kifejtenünk.

Keressük az egyensúlyban tartáshoz szükséges P erők végpontjainak mértani helyét, ha β szöget változtatjuk. P erő akkor a legkisebb, ha $\cos(\beta+\varepsilon) = 1$, vagyis $\beta + \varepsilon = 0$, tehát $\beta = -\varepsilon$. Tehát a kötelet ε szöggel kell a lejtő alá irányítani. A legkisebb lehetséges erő $AC = mg\sin(\alpha-\varepsilon)$. Az ACX derékszögű háromszögben az X-nél levő szög $\alpha-\varepsilon$, tehát $AX = mg$, a tárgy súlya. Tetszőleges β irányú erő végpontját úgy kapjuk meg P erő (2) képlete szerint, hogy a minimális AC erőt elosztjuk $\beta+\varepsilon$ cosinusával. Tehát P végpontjainak mértani helye a C-n átmenő, AC-re merőleges (és X-en átmenő) egyenes.

β szög számára a megengedett szögtartomány most is a lejtő felett (pozitív irányban) $0°$-tól $90° - \alpha$-ig terjed. Ennél nagyobb szögnél P erő leemelné a testet a lejtőről. A lejtő alá fordulva (negatív irányban) β szög abszolút értéke $0°$-tól $90° + \varepsilon$-ig terjed. Ennél nagyobb abszolút értékű β szögnél P erő végpontja nem kerülhetne a mértani helyre. Ábránkon a kettős ívű szögek jelentik azokat a határokat, amelyeken belül β változhat.

(Helyreigazítás. 1966. évi 7. számban a 85. oldalon könnyen észrevehető módon az 5. ábra legfelső pontja X és a 6. ábrán az X-nél levő szög $\alpha+\varepsilon$.)

II. megoldás. Mivel a test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, a testre ható erők eredőjének 0-nak kell lennie. Jelöljük a kényszererőt K-val, akkor a csúszás folytán a surlódási erő μK és a lejtőn felfelé mutat. Felírjuk azt, hogy a lejtőre ható erők eredője zérus a lejtőre merőlegesen és a lejtő irányában:

$$mg\cos\alpha - K - P\sin\beta = 0,$$
$$mg\sin\alpha - \mu K - P\cos\beta = 0.$$

Ezt az egyenletrendszert megoldjuk K-ra és P-re:

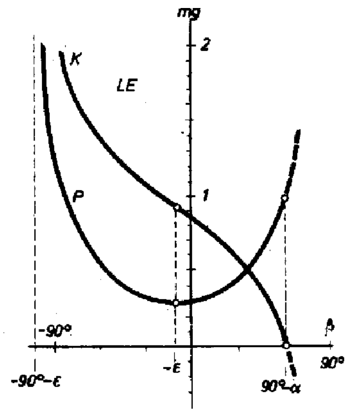
(3) $$K = mg\cos\alpha - P\sin\beta,$$

$$P = mg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta - \mu\sin\beta} = mg\frac{\sin(\alpha-\varepsilon)}{\cos(\beta+\varepsilon)}. \qquad (1),\ (2)$$

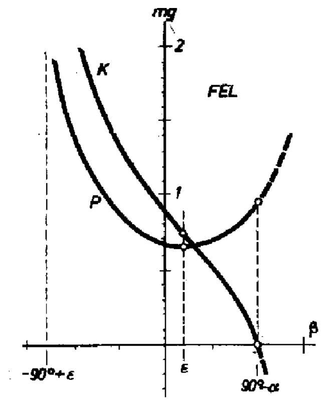
Mivel csak olyan lejtőkkel foglalkozunk, amelyeknél $\alpha > \varepsilon$, (2) számlálója biztosan pozitív. Pozitív P erőt akkor fogunk kapni, ha a nevező is pozitív.
Ez azt jelenti, hogy lefelé mutató (negatív) β szögek abszolút értéke $90^\circ + \varepsilon$-ig terjedhet, mert akkor $\beta + \varepsilon$ nem lépi túl a 90°-ot. Felfelé mutató (pozitív) β szögek esetében meg kell vizsgálnunk, milyen határok között marad a kényszererő pozitív. A (2) szerinti eredményt (3)-ba helyettesítve, átalakítással kapjuk a kényszererő számára:

$$K = mg\frac{\cos\varepsilon\ \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\varepsilon)}.$$

A kényszererő addig pozitív, amíg $\alpha + \beta$ nem több 90°-nál. Ábránkra tekintve látjuk, ez azt jelenti, hogy felfelé irányuló β szög szára nem kerülhet a függőlegestől balra.



2/a. ábra (a 656. feladathoz)



2/b. ábra (az 1966. évi tanulmányi verseny 2. feladatához)

Az áttekintést megkönnyíti, ha ábrázoljuk P egyensúlyozó erő és K kényszererő függését β szögtől (2. ábra bal oldali rajza). P húzóerő görbéje ε szöggel balra csúsztatott secans-függvény, K kényszererő görbéje pedig $90^\circ + \varepsilon$ szöggel balra csúsztatott és felemelt cotangens-függvény. Az ábrák vizsgálatából is látszik, hogy β számára $-(90^\circ + \varepsilon)$ és $90^\circ - \alpha$ közötti értékek lehetségesek.

Ugyanezzel a gondolatmenettel tárgyalható az 1966. évi tanulmányi verseny II. fordulójának 2. feladata is, amikor a tárgyat fel kellett húzni a lejtőn. Ekkor a húzóerő és a kényszererő számára adódó eredmények:

$$P = mg\frac{\sin(\alpha+\varepsilon)}{\cos(\beta+\varepsilon)}, \qquad K = mg\frac{\cos\varepsilon\cos(\beta+\alpha)}{\cos(\beta-\varepsilon)}.$$

β-tól való függésüket a 2. ábra jobb oldali rajza tünteti fel. Most P secans görbéje ε szöggel, K cotangensgörbéje $90^\circ - \varepsilon$ szöggel jobbra van eltolva. β számára az érvényességi terület $-(90^\circ - \varepsilon)$ és $90^\circ - \alpha$ között van.