a) Az impulzus (mozgásmennyiség) megmaradásának törvénye értelmében a rendszer tömegközéppontja $v_0 = \frac{v_1+v_2}{2}$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, mivel külső erő nem hat. Így egyszerre két ekvivalens inerciarendszerben vizsgálhatjuk a mozgást: a földhöz rögzített, ún. laboratóriumi koordináta-rendszerben, amelyhez viszonyított koordinátákat és sebességeket kisbetűvel jelöljük, és a tömegközépponthoz rögzített koordináta-rendszerben, amelyben a mozgás leírására a nagybetűket használjuk. A két rendszer origója a $t = 0$ pillanatban essen egybe. Ekkor az egyes tömegek sebessége a tömegközépponti rendszerben:

$$V_1 = v_1 - v_0 = \frac{v_1 - v_2}{2},$$
$$V_2 = v_2 - v_0 = \frac{v_2 - v_1}{2} = -V_1.$$

Ebben a koordináta-rendszerben a rugó középpontja mozdulatlan, akár rögzíthetjük is. Olyan, mintha a tömegeket az origóba erősített $L/2$ nyugalmi hosszúságú rugóhoz kötöttük volna, amelynek direkciós ereje $2D$ (ugyanis a fele hosszúságú rugót ugyanakkora erő csak felére nyújtja meg). A szimmetria miatt elegendő csak az m_1 tömeggel foglalkozni, mert m_2 mozgását (-1)-gyel való szorzással kapjuk (a tömegközépponti rendszerben).

A testre az $X_1 = L/2$ pontban nem hat erő, de ebből kimozdítva $P = -2D(X_1 - L/2)$ erő hat rá, amelynek hatására $\omega = \sqrt{\frac{2D}{m}}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás jön létre, ennek egyenlete:

$$X_1(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + L/2,$$
$$V_1(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Mivel m_1 a $t = 0$ pillanatban $X_1(0) = l_0/2$ helyen tartózkodott, és sebessége $V_1(0) = (v_1 - v_2)/2$ volt, ezért a behelyettesítés után A-ra és φ-re megoldva az egyenleteket, a rezgés amplitúdója

$$A = \sqrt{\left(\frac{l_0 - L}{2}\right)^2 + \frac{m}{2D}\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)^2},$$

fázisszöge:

$$\varphi = \text{arc sin}\left(\frac{l_0 - L}{2A}\right).$$

A feladat numerikus adataival:

$$\omega = \sqrt{\frac{2D}{m}} = 2\ \text{s}^{-1}, \quad v_0 = 6\ \text{cm/s}, \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ.$$

A laboratóriumi rendszerre visszatérve:

$$x_1(t) = X_1(t) + v_0 t = A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{L}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}t,$$
$$x_2(t) = X_2(t) + v_0 t = -A\sin(\omega t + \varphi) - \frac{L}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}t,$$
$$v_1(t) = V_1(t) + v_0 = A\omega\cos(\omega t + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2},$$
$$v_2(t) = V_2(t) + v_0 = -A\omega\cos(\omega t + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

b) Tegyük fel, hogy m_1 a h út megtétele után τ pillanatban ütközik, ekkor:

$$h + \frac{l_0}{2} = A\sin(\omega\tau + \varphi) + \frac{L}{2} + \frac{v_1 + v_2}{2}\tau.$$

Ez az egyenlet elvileg megoldható τ-ra. Ekkor a sebesség:

$$v_1(\tau) = A\omega\cos(\omega\tau + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

A végtelen tömegű falba való ütközés után m_1 sebessége az ellentettjére változik, de m_2-é változatlan marad, tehát:

$$v_1' = -A\omega\cos(\omega\tau + \varphi) - \frac{v_1 + v_2}{2},$$
$$v_2' = -A\omega\cos(\omega\tau + \varphi) + \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

A rugó hossza ebben a pillanatban:

$$l_0' = x_1 - x_2 = 2A\sin(\omega\tau + \varphi) + L.$$

A tömegközéppont sebessége az ütközés után:

$$v_0' = \frac{v_1' + v_2'}{2} = -A\omega\cos(\omega\tau + \varphi),$$

ami azt jelenti, hogy az ütközés után egy, a földhöz képest megváltozott sebességű tömegközépponti koordinátarendszert kell használni.

Ezzel a feladatot visszavezettük az előzőre, csak most $t = 0$ helyett $t = \tau$ pillanatban ismerjük a rendszer állapotát, vagyis most kezdőfeltételként a vesszőtlen mennyiségek helyett a vesszősekkel kell számolni.

Így a numerikus számolásnál csak τ meghatározása jelent problémát, ugyanis τ nem állítható elő algebrailag zárt alakban, viszont tetszőleges pontossággal meghatározható. A továbbiakban egy igen egyszerű közelítést fogunk alkalmazni.

Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy 10 teljes rezgést végezhet a rendszer ütközés nélkül. Mivel egy rezgés ideje $T = \pi$ s, ezért bevezetve $\tau' = \tau - 10$ új változót, az egyenlet így alakul:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2} + 60\frac{3}{4}\pi + \frac{9}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2(\tau' + 10\pi) - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{10}{2} + 6(\tau' + 10\pi),$$

ebből

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\tau' - \frac{\pi}{4}\right) + 6\tau'.$$

Mivel $\tau' = \dfrac{5}{24}\pi$ esetén $\delta = 2\tau' - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$, és ekkor az egyenlet jobb oldala már meghaladja a baloldalt, ezért a megoldás $0 < \delta < 30^\circ$ tartományban lesz, ahol közelítőleg

$$\sin\delta = \sin\left(2\tau' - \frac{\pi}{4}\right) \approx 2\tau' - \frac{\pi}{4}.$$

Ezzel megoldva az egyenletet: $\delta \approx 0{,}28$, ill. $\tau' = \left(0{,}14 + \dfrac{\pi}{8}\right)$ s.

A radiánt fokra átszámítva: $\delta \approx 16{,}1^\circ$, ennek sinusa: $\sin 16{,}1^\circ \approx 0{,}276$, vagyis közelítő feltevésünk százalék pontossággal teljesül. Ezzel a $\tau = 10\dfrac{1}{8}\pi + 0{,}14$-gyel számolva:

$$v_1' \approx -7{,}36 \text{ cm/s}, \qquad v_2' \approx 4{,}64 \text{ cm/s}, \qquad v_0' \approx -1{,}36 \text{ cm/s},$$

$$l_0' \approx 10{,}55 \text{ cm}, \qquad A' \approx 3 \text{ cm}; \qquad \varphi' = \arcsin\frac{2A\sin(\omega\tau + \varphi)}{2A'} =$$

$$= \Big\langle \begin{array}{l} +0{,}066 + 2k\pi \\ -0{,}066 + (2k\pi + 1)\pi, \end{array}$$

ahol $\varphi' = \pi - 0{,}066$ értéket kell venni, mert csak így lesz v_1' negatív. (Érdemes megjegyezni, hogy az ütközés hatására „fordított" fázisban folytatódik a rezgés. (A mozgás további részét vizsgálva látszik, hogy a rendszer újabb ütközés nélkül megindul visszafelé, de a visszafelé haladás v_0' sebessége jóval kisebb, mert az energia nagyrészt rezgési energiává alakult.

c) 1. Ha az ütközéskor, τ pillanatban a rugó hossza maximális: $l' = x_1 - x_2 = L + 2A$, akkor a sebességek:

$$v_1(\tau) = v_2(\tau) = v_0.$$

Az ütközés után: $v_1' = -v_0$, $v_2' = v_0$ és $v_0' = 0$.

$$\text{Ebből}: A' = \sqrt{A^2 + \frac{m}{2D}v_0^2} \quad \text{és} \quad \varphi' = \arcsin\frac{A}{A'}$$

Vagyis a tömegközéppont leáll, és egy nagyobb amplitúdójú rezgőmozgás kezdődik. A rugó először összenyomódik, majd mikor újra l' hosszúságúra nyúlik, a sebességek $v_1'' = v_0$ és $v_2'' = -v_0$ lesznek. Ekkor m_1 ütközik, és az ütközés utáni sebességek:

$$v_1''' = -v_0 \text{ és } v_2''' = -v_0.$$

Vagyis a rendszer az eredeti sebességgel és rezgési amplitúdóval megindul visszafelé.

2. Ha τ pillanatban $x_1 - x_2 = L - 2A$, akkor lényegében ugyanaz történik, mint előbb, csak ekkor a tömegközéppont leállásának ideje egy fél periódussal kisebb.

3. Ha τ pillanatban $x_1 - x_2 = L$, akkor $\cos(\omega\tau + \varphi) = \pm 1$, a sebességek pedig $v_1 = \pm A\omega + v_0$ és $v_2 = \mp A\omega + v_0$. Ütközés után:

$$v_1' = \mp A\omega - v_0, \quad v_2' = \mp A\omega + v_0, \quad v_0' = \mp A\omega.$$

Vagyis a rezgési és haladási energia felcserélődik.

Mivel A, ω és v_0 arányától függően több alesetet kellene végignézni, ezért ennek részletezésétől egyelőre eltekintünk, már csak azért is, mert lehet, hogy egy külön feladat tárgya lesz, ugyanis a megoldást beküldők egyike sem vizsgálta meg mélyebben ezt a kérdést.

Rácz Miklós (honvéd),
Gnädig Péter (I. é. fizikus, Budapest)