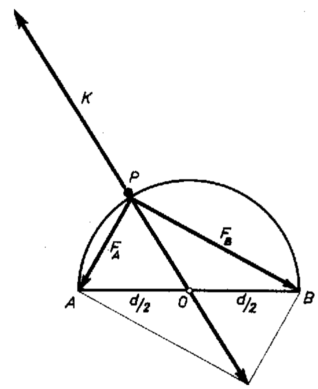
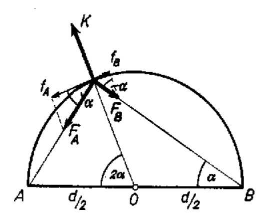
I. megoldás. A pontszerű testre három erő hat: az F_A és F_B húzóerők és a körpálya K kényszer- (ellen-)ereje, amely a körpályán tartja a testet (1. ábra). Mivel az F_A és F_B erők arányosak a PA és PB távolságokkal, az ábra léptékét úgy választhatjuk meg, hogy az F_A és F_B erőket éppen PA és PB hosszúságú szakaszokkal ábrázoljuk.



1. ábra

Thales tétele szerint F_A és F_B eredője éppen átmegy a kör középpontján. Mivel a test nem hagyhatja el a körpályát (a testnek nem lehet sugárirányú gyorsuláskomponense), a K kényszererőnek olyan nagynak kell lennie, mint az F_A és F_B eredője. A testre ható erők eredője éppen nulla a körpálya minden pontjában, tehát a nyugalomban levő pontszerű test továbbra is nyugalomba marad. (Egyensúlyi helyzete közömbös.) A gondolatmenet az A és B pontokban is érvényes.

Sághy András (Bp., Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)
dolgozata alapján



2. ábra

II. megoldás. A feladatot számítással is megoldhatjuk (2. ábra). Számítsuk ki a testre ható erők eredőjének érintő irányú komponensét. (A sugárirányú komponens nyilván nulla.) A két arányossági tényező legyen k_A és k_B. Ekkor:

$$PA = d \cdot \sin\alpha; \qquad PB = d \cdot \cos\,\alpha;$$

$$F_A = k_A \cdot PA = k_A \cdot d \cdot \sin\,\alpha;$$

$$F_B = k_B \cdot PB = k_B \cdot d \cdot \cos\,\alpha.$$

Az érintő irányú komponensek:

$$f_A = F_A \cdot \cos\alpha = k_A \cdot d \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 1/2 k_A \cdot d \cdot \sin 2\,\alpha,$$
$$f_B = F_B \cdot \sin\alpha = k_B \cdot d \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 1/2 k_B \cdot d \cdot \sin 2\,\alpha.$$

(A kényszererőnek nincs érintő irányú komponense.)
Így a nyugalomban levő pontra ható eredő erő:

$$f = f_A - f_B = 1/2(k_A - k_B) d \sin 2\alpha.$$

Ha $k_A = k_B$ (mint azt az I. megoldásban feltételeztük): $f = 0$, vagyis α-tól függetlenül (a körpálya minden pontjában) a test nyugalomban marad. Ha például $k_A > k_B$ (az A pontból ható erő arányossági tényezője nagyobb, vagyis az A „rugó” erősebb), f az A pont felé gyorsítja a testet. Tehát ekkor csak az A és a B pontokban ($\sin 2\alpha = 0$) marad nyugalomban a test, a többi helyen gyorsuló mozgást végez. A gyorsulás maximális akkor, ha $\sin 2\alpha$ maximális, vagyis ha $2\alpha = 90°$

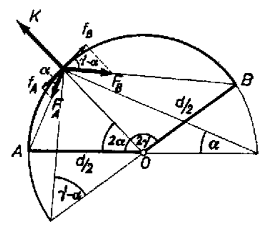
Stefanovicz Károly (Bp., Veres Pálné g. II. o. t.) és
Vad Kálmán (Jászberény, Lehel vezér g. II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Mivel a gömb egy átmérőjének két végpontja és a gömb felületének egy pontja által meghatározott sík egy körben metszi a gömböt, a feladat gömb esetére is általánosítható.

Nádai László (Bp., Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)

2. Ha tudjuk, hogy a rugó potenciális energiája $1/2\ kx^2$, ahol x a megnyúlás és k a rugóállandó (egységnyi kitérést létrehozó erő), akkor a megoldás így is nyerhető.

Az összes potenciális energia:
$E_p = 1/2PA^2 + 1/2kPB^2 = 1/2k\left(PA^2 + PB^2\right) = 1/2kd^2$ – állandó. Mivel a rendszer mindig úgy akar mozogni, hogy a potenciális energiája csökkenjen, ebben az esetben nem indul el a test. Látható, hogy ha pl. $k_A > k_B$, a potenciális energia akkor minimális, ha a test az A pontban van, vagyis a test csak itt van nyugalomban.



3. ábra

3. Ha az A és a B pont nem a kör egyik átmérőjének két végpontja, hanem az AOB szög $2\gamma \neq 180^\circ$ nagyságú, a feladatot a II. megoldáshoz hasonlóan megoldhatjuk (3. ábra):

$$PA = d \cdot \sin\alpha; \qquad PB = d \cdot \cos(\gamma - \alpha);$$
$$F_A = k_A PA = k_A \cdot d \cdot \sin\alpha;$$
$$F_B = k_B PB = k_B \cdot d \cdot \cos(\gamma - \alpha).$$

Az érintő irányú komponensek:

$$f_A = F_A \cos\alpha = 1/2k_A \cdot d \cdot \sin 2\alpha;$$
$$f_B = F_B \sin(\gamma - \alpha) = 1/2k_B \cdot d \cdot \sin 2(\gamma - \alpha).$$

Az eredő erő:

$$f = f_A - f_B = \frac{d}{2}\left[k_A \sin 2\alpha - k_B \sin 2(\gamma - \alpha)\right].$$

Ha $k_A = k_B = K$, akkor

$$f = \frac{kd}{2}[\sin 2\alpha - \sin 2(\gamma - \alpha)] = kd\cos\gamma\sin(2\alpha - \gamma)$$

$\big[$a $(\sin x - \sin y)$-ra vonatkozó összefüggés segítségével$\big]$.

A test csak az $f = 0$ esetben marad nyugalomban, vagyis ha $2\alpha = \gamma$. Tehát a test csak az AB ív felezőpontjában marad nyugalomban, különben pedig a felezőpont felé gyorsul a körív mentén. Ezek csak akkor igazak, ha $\cos\gamma \neq 0$ $(2\gamma \neq 180^\circ)$, mivel ha $2\gamma = 180^\circ$, f és a gyorsulás is α-tól függetlenül nulla.

A $kA \neq kB$ esetben a megoldás teljesen hasonló lesz, csak az egyensúlyi helyzet nem a körív felezőpontja:

$$k_A \sin 2\alpha - k_B \sin 2(\gamma - \alpha) = 0,$$

innen

$$\operatorname{tg}\, 2\alpha = \frac{k_B \sin 2\gamma}{k_A + k_B \cos 2\gamma}$$

az egyensúlyi helyzetben.

Faragó László (Bp., Fazekas M. g. II. o. t.)

4. A legtöbb megoldásban nem szerepel a kényszererő, hanem azt „a test nyugalomban van akkor, ha a rá ható összes erők eredője sugárirányú” kijelentéssel helyettesítették. Ilyen szempontból a feladat szövege sem helyes („más erő nem hat rájuk”).