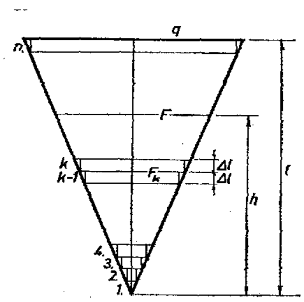
I. megoldás. Képzeljük el a kúpot megnyúlás előtt, és szeleteljük fel alapjával párhuzamos síkokkal n darab egyenlő magasságú csonkakúpra, ahol n igen nagy természetes szám. Legyen egy csonkakúp magassága Δl, tehát

(1) $$l = n \cdot \Delta l.$$

Mivel Δl igen kicsi, egy csonkakúpot hengernek tekinthetünk, másrészt megnyúlását vizsgálva saját súlyának hatásától eltekinthetünk. Világos, hogy mindkét közelítés annál pontosabb, minél nagyobb n.



Rátérve a megnyúlt kúp vizsgálatára, a kúp teljes megnyúlása a kis hengerek megnyúlásának összege. A k-adik henger megnyúlása Hooke törvénye szerint

(2) $$\Delta\lambda_k = \frac{P_k \Delta l}{EF_k},$$

ahol P_k a k-adik hengerre ható húzóerő, F_k pedig a k-adik henger alapterülete. P_k-t az adatok ismeretében könnyen kiszámíthatjuk: ez az első $k-1$ hengerből álló kúp súlya lesz, azaz

(3) $$P_k = \frac{1}{3}\varrho g F_k (k-1)\Delta l.$$

(3)-at (2)-be helyettesítve

(4) $$\Delta\lambda_k = \frac{\varrho g (k-1)(\Delta l)^2}{3E}.$$

A teljes megnyúlás (4) felhasználásával

(5) $$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \Delta\lambda_k = \frac{\varrho g (\Delta l)^2}{3E} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{\varrho g (\Delta l)^2}{3E} \cdot \frac{(n-1)n}{2},$$

ahol felhasználtuk a számtani sor összegképletét.

Mivel n igen nagy, azért mellette az 1 elhanyagolható, és így (5) második tényezője $n^2/2$-vel helyettesíthető. (1) szerint viszont $n = l/\Delta l$. E két tényt felhasználva (5) így alakul

$$\lambda = \frac{\varrho g (\Delta l)^2}{3E} \cdot \frac{l^2}{2(\Delta l)^2} = \frac{\varrho \cdot g l^2}{6E}.$$

Grósz Tamás (Bp., Ságvári E. g. II. o. t.)

II. megoldás. Ez a megoldás többet alapít a szemléletre, viszont kevesebb számolással adja az eredményt. Helyessége ismert analógiák alapján (pl. egyenletesen gyorsuló mozgás átlagsebessége) belátható.

Hooke törvénye olyan alakban is megfogalmazható, hogy a relatív megnyúlás arányos a feszültséggel

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta l} = \frac{1}{E} \cdot \sigma.$$

Itt Δl jelent a test egy bizonyos pontja közelében egy kis vonaldarabot, amely a feszítőerővel párhuzamos, $\Delta\lambda$ pedig a megnyúlása, végül σ a rugalmas feszültség.

Határozzuk meg, mekkora a kúp csúcsától mért h magasságban (amely magasságot a megnyúlás előtt mérjük) a feszültség! A feszítőerő a h magasságú, F alapterületű kúp súlya:

$$P = \frac{1}{3}\varrho F h, \text{ ezért a feszültség } \sigma = \frac{P}{F} = \frac{1}{3}\varrho g h,$$

tehát h-val egyenesen arányos. Szemléletesen világos, hogy feladatunk szempontjából számolhatunk az átlagos

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{6}\varrho g l \text{ feszültséggel.}$$

E feszültség pedig l szakaszon $\lambda = \dfrac{\bar{\sigma} l}{E} = \dfrac{\varrho g l^2}{6E}$ megnyúlást hoz létre.

Lábadi Albert (Bp., Vörösmarty M. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. 1. A végeredményben nem szerepel a p alapterület, ezért annak megadása felesleges volt.

2. Az I. megoldásban hasonló módon ki lehet mutatni, hogy bármely olyan forgástestre, amelynek sugara a csúcstól mért h magasság hatványfüggvénye: $r = a \cdot h^n$, igaz, hogy a megnyúlás

$$\lambda = \frac{Gl}{2Eq}$$

alakú, ahol az eddig használt jelöléseken kívül G-vel jelöltük a test súlyát. Speciálisan az $n = 0$ a henger, az $n = 1$ pedig a kúp esete.

Treer Ferenc (Bp., Piarista g. IV. o. t.)