A megadott P húzóerő ellen a súlyerő P_m lejtőirányú összetevője és a P_s súrlódási erő hat. A mozgásegyenlet tehát

$$(m_1+m_2)a = P - P_m - P_s, \quad \text{így}$$
$$a = \frac{P}{m_1+m_2} - g(\sin\alpha + \cos\alpha).$$

A számadatokat beírva ($P = 10{,}866 \cdot g\,\mathrm{N}$)

$$a = g/2.$$

A kúp a hasábbal együtt $g/2$ gyorsulással mozog, ezért a ráható tehetetlenségi erő a mozgással ellentétes irányban

$$P_t = m_{\text{kúp}} \cdot a = 2\,\mathrm{kp}.$$

A kúp egyensúlyi helyzete attól függ, hogy a P_t tehetetlenségi és a G súlyerő eredője a kúp alaplapján áthalad-e vagy sem. A két erő adott, tehát az eredő iránya meghatározott. Az egyensúlyi helyzet így csak a kúp magasságvonalában levő súlypont (és tömegközéppont) helyzetétől függ.

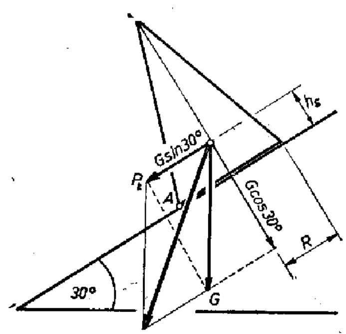
A kúp súlya adott, ezért térfogata, illetve magassága a fajsúlyától függ:

$$\gamma = G/V = \frac{G}{R^2\pi h/3}.$$

A súlypont a kúp magasságvonalának alsó negyedében van (bizonyítás a megjegyzésben), ezért a súlypont helyzete és a fajsúly között egyértelmű és fordítottan arányos összefüggés van.

$$h_s = h/4 = 3\,G/4R^2\pi \cdot \gamma.$$

Nyilvánvaló, hogy csak a labilis egyensúlyi helyzetet kell meghatároznunk, amely trigonometriai megfontolások alapján adódik.



1. ábra

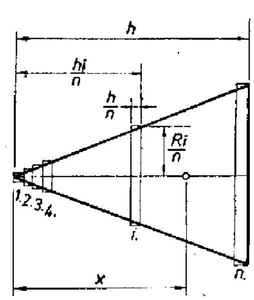
Egyszerűbb az egyensúlyi viszonyok meghatározása, ha a kúp legalsó (A) pontjára felírjuk az erők forgatónyomatékát (1. 1. ábra). A súlyerőt felbontva a lejtővel párhuzamosan hat $P_t + G\cdot\sin 30^\circ$, a lejtőre merőlegesen $G\cdot\cos 30^\circ$. A megfelelő erőkarok $h/4$, ill. R. Így

$$M = (P_t + G\cdot\sin 30^\circ)\frac{h}{4} - G\cdot\cos 30^\circ\cdot R.$$

Ha $M<0$, az egyensúly stabil, ha $M>0$, a kúp ledől.

Az $M=0$ határesetben az egyensúly labilis. Az előbbiek szerint ekkor a magasság $h = 17{,}32\,\mathrm{cm}$ és a fajsúly $\gamma = 8{,}82\,\mathrm{p/cm^3}$. Ha a fajsúly ennél az értéknél nagyobb, a súlypont alacsonyabbra kerül (az alaplaphoz viszonyítva), ekkor a kúp helyzete stabil, ha a fajsúly kisebb, akkor a kúp ledől.

Kótai Endre (Bp., Apáczai Cs. J. g. II. o. t.)
Takács László (Sopron; Széchenyi I. g. II. o. t.)



2. ábra

Megjegyzés. A homogén forgáskúp súlypontjának meghatározása: Helyezzük el a kúpot úgy, hogy magasságvonala vízszintes legyen. Osszuk a magasságvonalra merőleges síkokkal n egyenlő vastagságú részre (1. 2. ábra). Ha n elég nagy, akkor az osztás során létrejött csonkakúpok helyettesíthetők ugyanolyan magas hengerekkel, amelyek sugara az alapkörök sugarával egyezik meg. Az egyes hengerek magassága h/n. Írjuk fel a súlyerők forgatónyomatékát a kúp csúcsára vonatkoztatva. A súlypontban ható eredő súly forgatónyomatéka egyenlő lesz a felosztott kúprészek forgatónyomatékainak összegével. A számozást a csúcsból kezdve az i. henger alapjának távolsága a csúcsból $h \cdot i/n$ és sugara $R \cdot i/n$. Így forgatónyomatéka

$$M_i = V_I \cdot \gamma\,(h \cdot i/n) = (R\,i/n)^2 \cdot \pi \cdot (h/n) \cdot \gamma \cdot (h \cdot i/n) = R^2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \frac{h^2}{n^4}\, i^3.$$

Ezeket a forgatónyomatékokat az összes n-re összegezve kapjuk az eredőt.

$$M_e = R^2 \cdot \pi \cdot h \cdot \gamma \cdot x/3 = \sum_{l=1}^{n} R^2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \frac{h^2}{n^4} \cdot i^3,$$

ahol x a súlypont távolsága a csúcsból. Az állandókat kiemelve és egyszerűsítve

$$x/3 = h/n^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

Belátható, hogy az első n köbszám összege

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{i=2}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

ezt az előbbi kifejezésbe írva

$$x/3 = h/n^4 \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ha n-et egyre növeljük, a hengerek egyre jobban közelítik a kúpot, a kifejezésben pedig a $+\,1$ összeadandó elhanyagolható lesz n mellett, így mondhatjuk, hogy nagy n esetén

$$\frac{x}{3} \approx \frac{h}{n^4} \cdot \frac{n^4}{4} = \frac{h}{4}, \quad \text{amiből}$$

$x = 3h/4$, amint azt bizonyítani kívántuk.

Takács László (Sopron, Széchenyi I. g. II. o. t.)