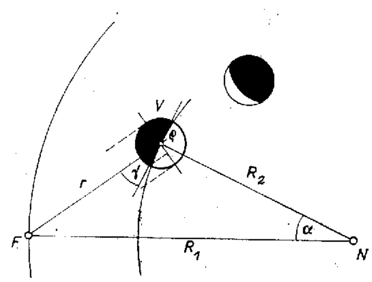
A nagy távolságok folytán a Nap és a bolygók saját rádiusza elhanyagolható egymástól mért távolságaik mellett. $r = FV$ a Föld – Vénusz távolság, $FN = R_1$, $VN = R_2 = 0{,}72R_1$, ϱ a Vénusz rádiusza (1. ábra). A Vénusz helyzetét vagy α szög (változik $0°$-tól $180°$-ig), vagy r távolság (változik $R_1 - R_2$ és $R_1 + R_2$ között) határozza meg. α és r összefüggése:

$$r = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\alpha}, \tag{1}$$

illetve:

$$\cos\alpha = \frac{R_1^2 + R_2^2 - r^2}{2R_1R_2},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2r^2(R_1^2 + R_2^2) - (R_1^2 - R_2^2)^2 - r^4}}{2R_1R_2}. \tag{2}$$



1. ábra

A Vénusz a Földről nézve $\pi\varrho^2$ területű körnek látszik, amelyen a sötét és világos rész határvonala egy ellipszis ϱ és $\varrho\sin\gamma$ féltengelyekkel; ennek az ellipszisnek a területe $\pi\varrho\cdot\varrho\sin\gamma = \pi\varrho^2\sin\gamma$. A fényes sarló területe a félkör és a félellipszis területének különbsége:

$$\frac{\pi\varrho^2}{2} - \frac{\pi\varrho^2\sin\gamma}{2} = \frac{\pi\varrho^2(1-\sin\gamma)}{2}. \tag{3}$$

Szükségünk van arra, miként függ γ r-től és α-tól. A sinus-tétel alapján:

$$\frac{\sin(90° + \gamma)}{\sin\alpha} = \frac{R_1}{r},$$

vagyis $\cos\gamma = R_1\sin\alpha/r$ és $\sin\gamma = \sqrt{1 - R_1^2\sin^2\alpha/r^2}$. Azután (1) és (2) felhasználásával:

$$\sin\gamma = \frac{R_1\cos\alpha - R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\alpha}},$$

illetve:

$$\sin\gamma = \frac{R_1^2 - R_2^2 - r^2}{2R_2r}. \tag{4}$$

A látszólagos fényesség egyenesen arányos a sarló területével és fordítva arányos a távolság négyzetével:

$$F = k\cdot\frac{\pi\varrho^2(1-\sin\gamma)}{2r^2} = K\cdot\frac{1-\sin\gamma}{r^2}.$$

Felhasználva a (4) alatti értéket, megkapjuk a látszólagos fényesség függését a távolságtól:

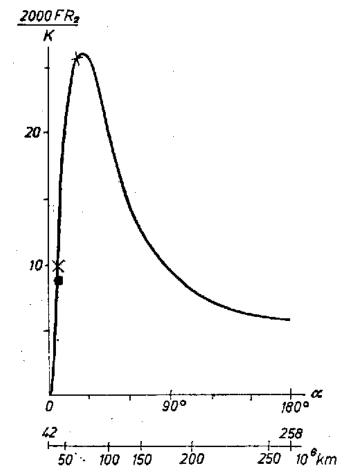
$$F = \frac{K}{2R_2}\cdot\frac{(r + R_2 + R_1)\cdot(r + R_2 - R_1)}{r^3}.$$

A feladatunk első kérdésében szereplő 45 millió km-es távolságot r helyébe helyettesítve a $K/2R_2$ mellett álló szorzó értéke $101/10\,125 = 0{,}00997$; a második kérdésben szereplő 60 millió km behelyettesítésének eredménye $53/2000 = 0{,}0265$. Tehát a második esetben, amikor a Vénusz távolabb van, akkor nagyobb a látszólagos fényessége $4293/1616 = 2{,}656$ arányban.

Jakab Mihály (Bp., Móricz Zs. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Ha egy gömb felszínének minden pontja minden irányban egyenlő mértékben sugároz fényt, akkor távolról nézve egyenletes fénysűrűségű kört látunk. Ugyanis amilyen mértékben ferdül a felület oldalt, olyan mértékben nagyobbodik is területe. Erre példa egy opálgömb-lámpa és a Nap. Feladatunk szövege sugalmazta ezt az esetet. Azonban ha egy megoldó világító felületnek a Vénuszfelszín megvilágított gömbkétszögét számította, megoldását elfogadtuk, mert a kérdés lényegét ez nem érinti.

Feltűnő módon a megoldók nem keresték függvényszerűen a Vénusz látszólagos fényességének a helytől való függését. Végső eredményünk szerint az r-től való függés könnyen ábrázolható, de tanulságosabb az α-tól való függés vizsgálata, mert α arányos az idővel. Vagy az (1) alatti eredményt helyettesítjük végeredményünkbe, vagy célszerűbben különböző α értékekhez tartozó r-ek táblázatát készítjük el és azután számolunk végeredményünkkel. A 2. ábra a látszólagos fényesség α-tól való függését tünteti fel, de a tengely alatt a távolságok tájékoztató értékei is fel vannak tüntetve. A görbén keresztek jelölik meg a feladat kérdéseiben szereplő értékpárokat.



2. ábra