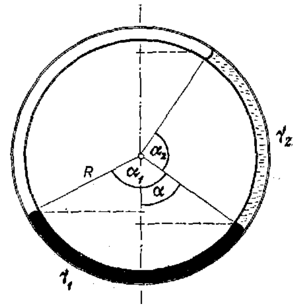
Legyen az egyik folyadék (higany) fajsúlya γ_1, középponti szöge α_1, a másik folyadék (víz) fajsúlya γ_2, középponti szöge α_2. A két folyadék közös határfelületéhez vezető rádiusz alkosson a függőlegessel α szöget (1. ábra), ez az α legyen a meghatározandó ismeretlen mennyiség.



1. ábra

A kétfolyadékos közlekedő edény törvénye szerint egyensúly esetén a találkozási felületen a nyomások egyenlők, illetve az innen mért függőleges magasságkülönbségek fordítva arányosak a fajsúlyokkal:

$$\gamma_1[R\cos\alpha - R\cos(\alpha_1-\alpha)] = \gamma_2[R\cos\alpha - R\cos(\alpha_2+\alpha)].$$

Beszorozva, $\cos\alpha$-val végigosztva és rendezve:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}(1-\cos\alpha_1) - (1-\cos\alpha_2)}{\sin\alpha_2 + \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\sin\alpha_1}.$$

A mi esetünkben $\gamma_1 = 13{,}6\ \mathrm{p/cm^3}$, $\alpha_1 = 120^\circ$, $\gamma_2 = 1\ \mathrm{p/cm^3}$, $\alpha_2 = 90^\circ$, ezek alapján $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}518$ és $\alpha = 56^\circ 37'$.

Mi lesz, ha még több vizet töltünk bele? α lassan csökken és a víz felső vége közeledik a cső tetejéhez. Azután, hogy ezt elérte, a feladat határozatlanná válik, mert a víz egy része átlóg balfelé. Ha a vízoszlop két részre szakad szét, akkor a feladat határozatlan. De keskeny csőben könnyen megtörténik, hogy a vízoszlop átlóg és egyben marad. Ilyen esetben folytathatjuk a számítást.

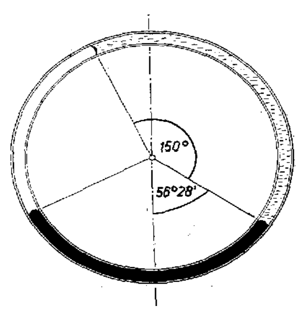
Annak a feltétele, hogy a vízoszlop elérje a cső tetejét: $\alpha_2 + \alpha = 180^\circ$. Behelyettesítve kiindulási egyenletünkbe ezt a feltételt, α-ra ez az egyenlet adódik:

$$\left[\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \sin^2\alpha_1 + a^2\right]\sin^2\alpha + 2\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\sin\alpha_1\sin\alpha + (1-a^2)0,$$

ahol

$$a = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}(1-\cos\alpha_1) - 1.$$

A mi esetünkben az egyenlet megoldása $\alpha = 56^\circ 13'$ és $\alpha_2 = 123^\circ 47'$. Feladatunk második kérdésében $\alpha_2 = 150^\circ$, tehát a vízoszlop feltétlenül átlóg. Megoldóképletünkbe $\alpha_2 = 150^\circ$-ot helyettesítve $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}509$ és $\alpha = 56^\circ 28'$, ami egy kicsit több, mint amikor a víz éppen eléri a cső tetejét. Ez természetes, hiszen a vízoszlop nyomása átlógáskor csökken (2. ábra).

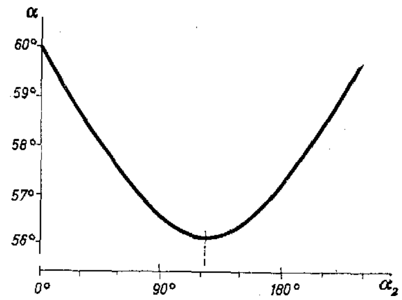


2. ábra

Halász Pál (Szolnok, Verseghy g. III. o. t.)

Megjegyzés. Több dolgozat szerzője nem tudta, hogy a folyadékok egyensúlyánál a nyomás a döntő és ez a függőleges magasságkülönbségtől függ, vagy nem voltak képesek ezt trigonometriailag kifejezni. Természetes, hogy az egyensúly stabilis. Érdekes megvizsgálni, hogyan függ α a beöntött víz mennyiségétől, vagyis α_2-től, ha a többi adat változatlan marad. Ekkor megoldóképletünk alapján

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{19{,}4 + \cos\alpha_2}{11{,}78 + \sin\alpha_2}.$$



3. ábra

Ennek az összefüggésnek a grafikonját mutatja a 3. ábra. Víz nélkül és tele vízzel a higany egyaránt $\alpha = 60°$-nál találkozik a vízzel. A találkozási higanyfelszín minimuma $\alpha_2 = 123°47'$-nél van, amikor a vízoszlop eléri a kör tetejét.

Vermes Miklós