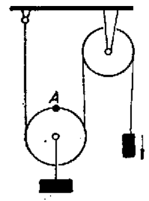
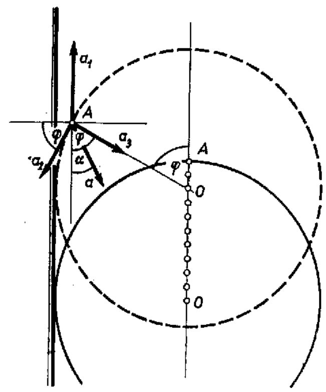
A mozgócsiga középpontjának felfelé feltételezett gyorsulása $a_0 = 0{,}4\ \mathrm{m/s^2}$ (1. ábra). Feladatunkat most már úgy értelmezhetjük, hogy függőleges falon felfelé gurul egy henger, a fallal csúszásmentesen érintkezve. A henger középpontjának gyorsulása a_0. Mennyi az A pont gyorsulása az indulás után 1,5 másodperccel?



1. ábra



2. ábra

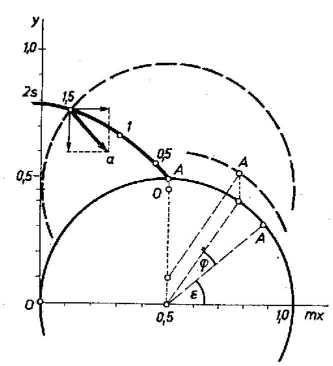
Az A pont a henger középpontjával együtt gyorsul felfelé $a_1 = a_0 = 0{,}4\ \mathrm{m/sec^2}$ gyorsulással (2. ábra). A kerületi sebesség egyenlő a középpont (egyenletesen változó) sebességével, ezért az A pont az érintő irányában, az érintő mentén előre mutató $a_2 = a_1 = 0{,}4\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulással is rendelkezik. Az A pont harmadik gyorsulásösszetevője $a_3 = v^2/R$ centripetális gyorsulás a középpont felé irányulva. Az A pont kerületi sebessége $v = a_2 t = 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6\ \mathrm{m/s}$, ezért $a_3 = 0{,}36/0{,}5 = 0{,}72\ \mathrm{m/s^2}$.

A három gyorsulásösszetevőt vektoriálisan kell összeadnunk. A mozgócsiga középpontjára vonatkoztatott szöggyorsulás $\beta = a_2/R = 0{,}4/0{,}5 = 0{,}8\ \mathrm{s^{-2}}$. A t másodperc alatt létrejövő szögelfordulás $\varphi = \beta t^2/2 = 0{,}9$ radián $= 51{,}6^\circ$. Az a_1 gyorsulás vízszintes összetevője 0, függőleges összetevője $0{,}4\ \mathrm{m/s^2}$. Az a_2 gyorsulás vízszintes összetevője $a_2 \cos 51{,}6^\circ = 0{,}249\ \mathrm{m/s^2}$ balra; függőleges összetevője $a_2 \sin 51{,}6^\circ = 0{,}313\ \mathrm{m/s^2}$ lefelé irányítva. Az a_3 vízszintes összetevője $a_3 \sin 51{,}6^\circ = 0{,}564\ \mathrm{m/s^2}$ jobbra mutatóan, függőleges összetevője $a_3 \sin 51{,}6^\circ = 0{,}447\ \mathrm{m/s^2}$ lefelé irányulva. Ezek szerint az eredő gyorsulás vízszintes összetevője az $a_x = (0{,}564 - 0{,}249)\ \mathrm{m/s^2} = 0{,}315\ \mathrm{m/s^2}$ jobbra; függőleges összetevője $a_y = (0{,}4 - 0{,}313 - 0{,}447)\ \mathrm{m/s^2} = -0{,}360\ \mathrm{m/s^2}$ lefelé. Az eredő gyorsulás nagysága $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0{,}478\ \mathrm{m/s^2}$, az irányát meghatározó, a függőlegestől lenn jobbra mutató α szögre érvényes, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_x}{a_y} = 0{,}8750, \qquad \alpha = 41{,}19^\circ.$$

Tüttő Péter (Budapest, Eötvös g. IV. o. t.) dolgozata alapján

Több megoldó úgy értette és oldotta meg a feladatot, mintha az A pont a mozgás megindulása után 1,5 másodperc múlva jutna a mozgócsiga tetőpontjára. Ezeket a megoldásokat is elfogadtuk.



3. ábra

Megjegyzés. Meghatározhatjuk A pont pályáját is. Helyezzük el a koordinátarendszer origóját a mozgás kezdetekor a mozgócsiga és a baloldali kötél érintkezési pontjába (3. ábra). Az A pont helyzetét az indulás pillanatában a mozgócsiga középpontjából a feléje mutató rádiusz ε szöge határozza meg. t idő múlva a kör középpontja $a_1t^2/2 = 0{,}2t^2$ magasságba emelkedik és a feléje mutató rádiusz $\varphi = \beta t^2/2 = 0{,}4t^2$ radiánnyi, vagyis $22{,}92t^2$ foknyi szöggel fordul el. Ezért t pillanatban A pont koordinátái:

$$x = R + R\cos(\beta t^2/2 + \varepsilon),$$
$$y = a_1t^2/2 + R\sin(\beta t^2/2 + \varepsilon).$$

A mi esetünkben és fokokban számolva:

$$x = 0{,}5 + 0{,}5\cos(22{,}92t^2 + \varepsilon),$$
$$y = 0{,}2t^2 + 0{,}5\sin(22{,}92t^2 + \varepsilon).$$

Ezek a függvények a kör bármely pontjának ún. cikloisz pályáját adják meg paraméteres alakban. Az ε nagysága attól függ, hogy a kör mely pontjáról van szó. Ha $t = 0$-kor A pont koordinátái $x = R$ és $y = R$, akkor egyenleteinkből látható, hogy $22{,}92 \cdot 0^2 + \varepsilon = 90^\circ$, tehát $\varepsilon = 90^\circ$. Az ekkor keletkező pályát és a gyorsulást a 3. ábra mutatja ezekkel a képletekkel számolva:

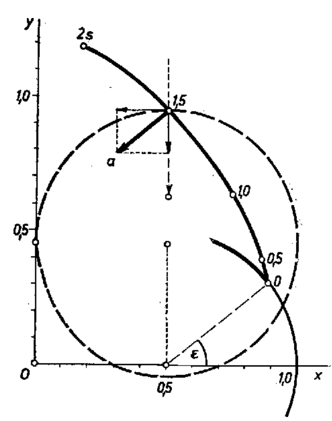
$$x = 0{,}5 + 0{,}5\cos(22{,}92t^2 + 90),$$
$$y = 0{,}2t^2 + 0{,}5\sin(22{,}92t^2 + 90).$$

Látható, hogy a gyorsulás a pálya homorú oldala felé irányul; mivel hátrahajlik, az érintőleges gyorsulás fékez.

Ha A pont $t = 1{,}5$ s-kor éri el az $x = R$ és $y = 0{,}2 \cdot 1{,}5^2 + R$ koordinátákat, akkor egyenleteink szerint ismét $22{,}92 \cdot 1{,}5^2 + \varepsilon = 90^\circ$, így $\varepsilon = 38{,}43^\circ$, és a pályát megadó függvények:

$$x = 0{,}5 + 0{,}5\cos(22{,}92t^2 + 38{,}43^\circ),$$
$$y = 0{,}2t^2 + 0{,}5\sin(22{,}92t^2 + 38{,}43^\circ).$$

Ezekkel számítva a feladat másik értelmezése esetében keletkező pályát a 4. ábra mutatja.



4. ábra

A görbe mindig ugyanannak a cikloisznak más és más része. Most is ugyanakkorák az a_1, a_2, a_3 gyorsulásösszetevők, de irányuk függőleges, illetve vízszintes. Az eredő most is ugyanakkora, csak más irányba mutat.

Vermes Miklós