A feladat szövege félreértésre adott lehetőséget, továbbá a megoldáshoz szükséges összefüggés sem állt mindenkinek rendelkezésre. A beérkezett 31 dolgozat egyike sem tartalmazott helyes megoldást. Ezért a feladatot nem pontozzuk. Itt közöljük a pontos szöveget és a megoldást. A felhasznált összefüggéssel foglalkozik még a lapunk 178. oldalán közölt cikk.

Egy R sugarú fagömböt vékony dróttal tekercseljünk körül úgy, hogy az összes tekercsmenetek egymással párhuzamosak legyenek. A tekercsmenetek szorosan egymás mellett feküsznek, s egy rétegben fedik be az ábrán látható módon a gömbfelület felét. A drótban I erősségű áram folyik, a menetek száma N. Határozzuk meg a gömb középpontjában a mágneses térerősséget, tudva azt, hogy egy r sugarú, I erősségű köráram a síkjára a kör középpontjában emelt merőlegesen x távolságra

$$\frac{1}{2}\,\frac{Ir^2}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

nagyságú, a síkra merőleges irányú mágneses teret hoz létre. (Ez az összefüggés akkor érvényes, ha az áramerősséget A-ban, a távolságot m-ben, a mágneses térerősséget pedig A/m-ben mérjük.)

Avégett, hogy az összes menetektől származó térerősséget kiszámítsuk, osszuk fel az első negyedet n egyenlő, $\Delta\varphi$ nagyságú szögre. Az osztópontok tehát

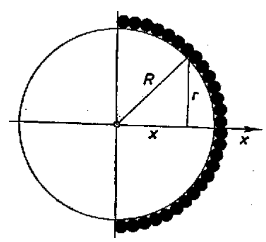
(1) $$0,\quad \Delta\varphi,\quad 2\Delta\varphi,\quad \dots,\quad k\Delta\varphi,\quad \dots,\quad n\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

(Megjegyezzük, hogy a szöget mindig radiánban adjuk meg.) A k-adik szögtartomány határpontjai eszerint:

$$(k-1)\Delta\varphi \quad \text{és} \quad k\Delta\varphi.$$

Mivel a menetek szorosan illeszkednek egymáshoz, azért bármelyik szögtartományban a menetek száma

(2) $$\Delta N=\frac{2N}{\pi}\Delta\varphi.$$



1. ábra

Az egy menet által a középpontban létesített térerősség – az 1. ábra jelöléseit használva

(3) $$\frac{1}{2}\,\frac{Ir^2}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

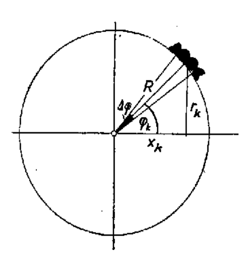
Relative is kis hibát követünk el akkor, ha a menetet az x-tengelyhez viszonyítva jellemző szöget egy szögtartományon belül állandónak tekintjük, amennyiben $\Delta\varphi$ elég kicsi (vagyis n elég nagy).

Választhatjuk pl. a szögtartományt felező szöget, tehát a k-adik tartomány esetében ez az állandó szög:

(4) $$\varphi_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\Delta\varphi.$$

Ezek alapján a k-adik tartomány meneteitől származó térerősséget úgy állítjuk elő mint ΔN db olyan menettől származó teret, amelyet a φ_k szög jellemez. Ez a térerősség:

(5) $$\Delta H_k=\frac{1}{2}\,\frac{Ir^2}{(x_k^2+r_k^2)^{3/2}}\Delta N.$$



2. ábra

Felhasználva egyrészt ΔN kifejezést (2), másrészt a 2. ábráról leolvasható $x_k^2 + r_k^3 = R^2$ egyenlőséget, kapjuk:

(6) $$\Delta H_k = \frac{INr_k^2}{R^3\pi}\Delta\varphi.$$

Mivel azonban a 2. ábra szerint $r_k = R\sin\varphi_k$, ezért

(7) $$\Delta H_k = \frac{IN}{R\pi}\Delta\varphi\sin^2\varphi_k.$$

A teljes térerősséget úgy kapjuk, hogy ΔH_k-t valamennyi tartományra összegezzük:

(8) $$H = \sum_{k=1}^{n}\Delta H_k = \frac{IN}{R\pi}\,\Delta\varphi\sum_{k=1}^{n}\sin^2\varphi_k.$$

Mivel $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, azért

(9) $$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\varphi_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cos 2\varphi_k = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos 2\varphi_k.$$

A továbbiakban csak a $\sum_{k=1}^{k}\cos 2\varphi_k$ meghatározásával foglalkozunk. Ez – beírva φ_k (4) alatti kifejezését – így alakul:

(10) $$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\Delta\varphi.$$

Legyen először n páros. Ekkor $n/2$ egész, tehát ez a szumma így írható:

(11) $$\sum_{k=1}^{n/2}\cos(2k-1)\Delta\varphi + \sum_{k=n/2+1}^{n}\cos(2k-1)\Delta\varphi.$$

A második tagban felhasználjuk, hogy $\cos\alpha = -\cos(\pi-\alpha)$, ezért $\cos(2k-1)\Delta\varphi = -\cos[\pi-(2k-1)\Delta\varphi]$. De (1) szerint $\pi = 2n\Delta\varphi$, tehát ez így írható tovább: $-\cos[2(n-k)+1]\Delta\varphi = -\cos(2k'-1)\Delta\varphi$, ahol k'-vel az $n-k+1$ egész számot jelöltük.

Milyen értékeket vesz fel k', miközben k végigfut $(n/2+1)$-től n-ig? Világos, hogy ezalatt k' $n/2$-től 1-ig fut, tehát a második tag így alakul:

(12) $$\sum_{k=n/2+1}^{n}\cos(2k-1)\Delta\varphi = -\sum_{k'=1}^{n/2}\cos(2k'-1)\Delta\varphi.$$

Látható, hogy – mivel az összegező index jelölésének nincs jelentősége (11)-ben az első és a második tag kiesik. Ezért n páros értékeire

(13) $$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\Delta\varphi = 0.$$

Ha n páratlan, akkor $\left(\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$ és $\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{3}{2}\right)$ egymást követő egész számok. Ezért ekkor a szumma így írható:

(14) $$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\cos(2k-1)\Delta\varphi + \cos\left[2\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)-1\right]\Delta\varphi + \sum_{k=\frac{n}{2}+\frac{3}{2}}^{n}\cos(2k-1)\Delta\varphi.$$

A középső tagról azonnal látjuk, hogy eltűnik, mert a szögletes zárójelben n áll, $n\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, és $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. A második szummát most is könnyen átalakíthatjuk, és $k' = n+k-1$ jelöléssel az előző esethez hasonlóan, az első szummától csak előjelben és az összegező index jelölésében fog eltérni. Ezért páratlan n-re is:

(15) $$\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\Delta\varphi = 0.$$

Most már a célnál vagyunk: eredményünk szerint

$$\sum_{n=1}^{n} \sin^2 \varphi_k = \frac{n}{2}. \tag{16}$$

Ezt a teljes térerősség (8) kifejezésébe helyettesítve:

$$H = \frac{INn\Delta\varphi}{2R\pi}. \tag{17}$$

Felhasználva, hogy $n\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, kapjuk, hogy közelítőleg

$$H = \frac{IN}{4R}. \tag{18}$$

Nagy Dénes Lajos