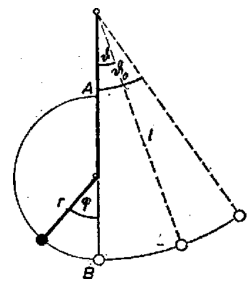
A test ϑ_0 szögből indul el. Felírhatjuk az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\vartheta) = mgl(1-\cos\vartheta_0).$$

Ebből kifejezve a sebességet

$$v^2 = 2lg(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$
$$v = \sqrt{2lg(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}.$$



1. ábra

A B pontban $\vartheta = 0^\circ$, tehát $v_B^2 = 2lg(1-\cos\vartheta_0)$. A fonál nekiütközik a rúdnak, és így most egy r sugarú ingát képez. Ebben az esetben is felírhatjuk az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}mv_B^2,$$
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgr(1-\cos\varphi) = mgl(1-\cos\vartheta_0).$$

Kifejezhetjük a sebességet, amellyel a test tovább mozog:

$$v^2 = 2g[l(1-\cos\vartheta_0) - r(1-\cos\varphi)],$$
$$v = \sqrt{2g[l(1-\cos\vartheta_0) - r(1-\cos\varphi)]}.$$

Az átfordulás feltétele, hogy az A ponton a centripetális erő nagyobb legyen a test súlyánál:

$$\frac{mv_A^2}{r} \geq mg, \qquad v_A^2 \geq gr, \text{ azaz}$$
$$2g[l(1-\cos\vartheta_0) - 2r] \geq gr, \text{ mert az } A \text{ pontban } \varphi = 180^\circ.$$

Ebből

(1) $$l(1-\cos\vartheta_0) \geq \frac{5}{2}r,$$
$$\cos\vartheta_0 \leq 1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{r}{l}.$$

A keresett legkisebb ϑ_0-ra áll fenn az egyenlőség:

$$\cos\vartheta_0 = 1 - \frac{5}{2}\cdot\frac{r}{l}.$$

Fejezzük ki r-et az (1)-ből

$$r \leq \frac{2}{5}l(1-\cos\vartheta_0).$$

Tehát a legnagyobb r adott ϑ_0-nál

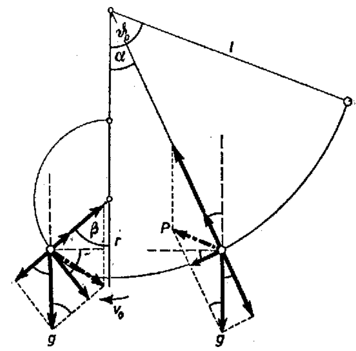
$$r = \frac{2}{5}l(1-\cos\vartheta_0).$$

Tüttő Péter (Bp., Eötvös J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladat szövegében egy negyedik kérdés is szerepelt, mely a kitűző hibáján kívül téves szöveggel jelent meg. A kérdés helyesen így hangzik:

4.) *Írjuk fel és ábrázoljuk a tömegpontra ható eredő erőt a* **szög** *függvényében!*

Így a feladat utolsó kérdése helyesen értelmezve a testre ható erőnek a szögtől, a test helyzetétől való függését kérdi és ennyiben általánosítása az 557. feladatnak.



2. ábra

Az energiaelv alapján az α szöggel jellemzett helyzetben a test sebessége (2. ábra):

$$v^2 = 2gl(\cos\alpha - \cos\vartheta_0).$$

Az $\alpha = 0$-hoz tartozó legalsó helyzetben:

$$v_0^2 = 2gl(1 - \cos\vartheta_0).$$

Az 557. feladat megoldásában ismertetett módon kiszámítható, hogy a testre a fonálerő és a súlyerő eredője hat, azonban a fonálerő mv^2/l centripetális erő és $mg\cos\alpha$ összege. A teljes erő gyorsulásának vízszintes és függőleges összetevői:

$$a_x = g\sin\alpha(3\cos\alpha - 2\cos\vartheta_0),$$
$$a_y = g(3\cos^2\alpha - 2\cos\vartheta_0\cos\alpha - 1).$$

Ezek alapján megrajzolhatók a gyorsulások minden egyes helyzetben.

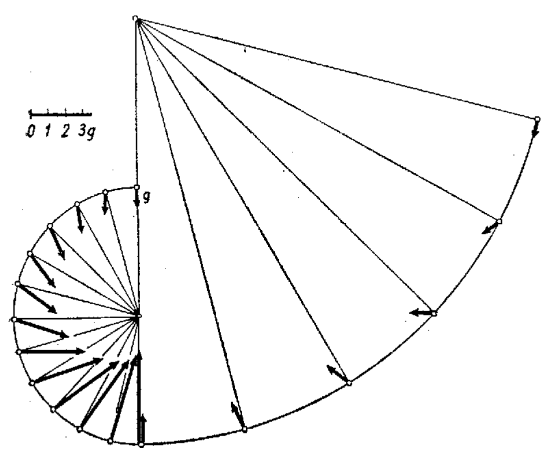
A tömeg felfelé menetelekor az r rádiuszú körön a β szöggel jellemzett helyzetben a sebesség az energiaelv alapján:

$$v^2 = v_0^2 - 2gr(1 - \cos\beta) = gr\left[\frac{2l}{r}(1 - \cos\vartheta_0) - 2(1 - \cos\beta)\right].$$

Az előbbiekhez hasonlóan számítva a felfelé menő test teljes gyorsulásának vízszintes és függőleges összetevői:

$$a_x = g\sin\beta\left[\frac{2l}{r}(1 - \cos\vartheta_0) + 3\cos\beta - 2\right],$$

$$a_y = g\left\{\left[\frac{2l}{r}(1 - \cos\vartheta_0) - 2(1 - \cos\beta)\right]\cos\beta - \sin^2\beta\right\}.$$

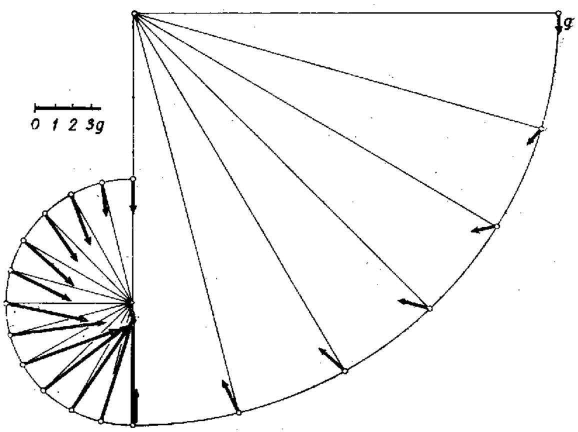


3. ábra

A 3. ábra vastag nyilai a test gyorsulását tüntetik fel, ha $l = 10$ cm, $r = 3$ cm és az indítás szöge az átforduláshoz éppen szükséges minimális érték:

$$\vartheta_0 = \arccos\left(1 - \frac{5r}{2l}\right) = \arccos 0{,}25 = 75{,}5^\circ.$$

A gyorsulások alakulását a tömeg lemenésekor már az 557. feladatból ismerjük. Az ábra baloldala a felmenéskor fellépő gyorsulásokat mutatja 15°-onként. *A gyorsulás hirtelen megnövekszik,* amikor a tömeg a kisebb rádiuszú pályára tér rá. A kör tetőpontján a teljes gyorsulás g. Ekkor nincs fonálerő, éppen az mg súly szolgáltatja a centripetális erőt. *Bármely helyzetben úgy kaphatjuk meg a fonálban ható erőt, hogy a testre ható és rajzunkban ábrázolt teljes erőből vektoriálisan kivonjuk mg-t.* Észre fogjuk venni, hogy a kivonás eredménye mindig a rádiuszban fekszik.



4. ábra

A 4. ábra $l = 10$ cm, $r = 3$ cm és $\vartheta_0 = 90°$-os indítás mellett mutatja a gyorsulásokat. Ekkor a minimálisnál nagyobb sebességgel halad át a test a kis kör tetőpontján és itt a gyorsulása $2g$, amiből $1g$-t a fonálerő okoz.

Vermes Miklós

Figyelmesen megvizsgálva a 3. ábrát, feltűnik, hogy a legalsó pontban a gyorsulás értéke pillanatszerűen ugrik. Ez az „ugrás” nyújthatatlan fonál esetében valóban pillanatszerűen következik be. Kérdés: nem szakad-e el a fonál ekkor? A válasz egyszerű, bár sokak számára nem magától értetődő. A fellépő erő ugyanis nem a gyorsulás időegységre eső változásával, hanem a sebesség megváltozásával arányos. Itt pedig nem a sebesség, hanem a *sebességváltozás mértéke (a gyorsulás) változik* hirtelen, s a fellépő erő nem nő a végtelen felé (a fonál nyújthatatlanságának függvényében), hanem hirtelen, de véges, a rajznak megfelelő pontosan meghatározott értékkel változik, aminek nincsen semmi befolyása a fonál szakadására.

Holics László