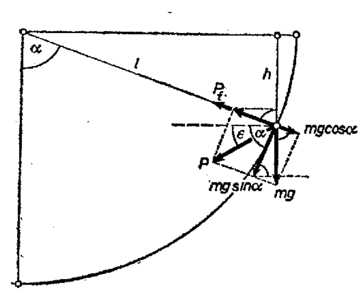
Az inga tömegének helyzetét az α szög határozza meg. Az m tömegre hat mg súlyerő, amelyet helyettesíthetünk $mg\sin\alpha$ és $mg\cos\alpha$ összetevőivel. Azonkívül az m tömeget a középpont felé húzza a fonál P_l erővel. A fonál ereje egyenlő az mv^2/l nagyságú centripetális erő és $mg\cos\alpha$ nagyságának összegével. l a fonál hosszát, v pedig a sebességet jelenti, amely így számítható: $v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2gl\cos\alpha}$ (1. ábra). A súly kifelé ható $mg\cos\alpha$ összetevője és a P_l fonálerő ellentétesen ható $mg\cos\alpha$ része kiegyenlíti egymást; marad az m tömegre ható érintőleges $mg\sin\alpha$ erő és a középpont felé húzó $mv^2/l=2gm\cos\alpha$. Ezek eredője a teljes P erő. Az erőket osztva a tömeggel kapjuk a gyorsulást. Az eredő gyorsulás függőlegesen lefelé mutató összetevője:

$$\begin{aligned} a_f &= g\sin\alpha\,\sin\alpha-2g\cos\alpha\,\cos\alpha= \\ &= g(\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha)=g(1-3\cos^2\alpha), \end{aligned} \tag{1}$$

az eredő gyorsulás vízszintesen balra mutató összetevője:

$$a_v=g\sin\alpha\,\cos\alpha+2g\cos\alpha\,\sin\alpha=3g\sin\alpha\,\cos\alpha. \tag{2}$$



1. ábra

Az általunk keresett fonálhelyzetet úgy találjuk meg, hogy az (1) szerinti függőleges összetevőt 0-val tesszük egyenlővé:

$$g(1-3\cos^2\alpha)=0.$$

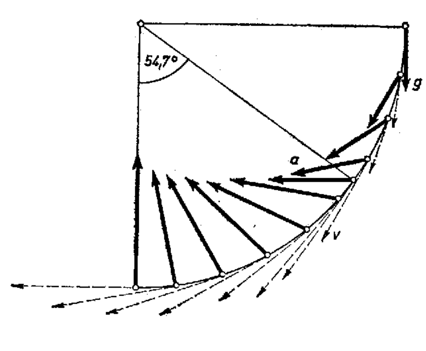
Innen

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \alpha=54{,}7^\circ.$$

E gyorsulás nagysága (2)-ből $g\sqrt{2}$.

Tóth-Pál Sándor (Bp., Hámán K. g. III. o. t.)

Megjegyzések. A feladatra beküldött sok hibás megoldás azt mutatja, hogy sokan nincsenek tisztában a gyorsulás szerepével görbevonalú mozgás esetében. Az eredeti meghatározás szerint a gyorsulást úgy kapjuk meg, hogy a sebességnek mint vektornak az „1 másodpercre jutó megváltozását” keressük. Az inga pályája mentén a sebesség mindig az érintő mentén mutat és mindig növekszik, változásából megkaphatnánk a gyorsulást. Könnyebb úgy eljárni, hogy a ható erőt osztjuk a tömeggel. De a ható erő a tömegre kívülről ható erők eredőjét jelenti. Itt sokan abban hibáztak, hogy a fonálban csak a centripetális erőt tételezték fel, mint ható erőt. Ha körpályán állandó nagyságú sebességgel mozog egy tömeg, akkor a gyorsulás merőleges az érintőre, a középpont felé mutat. Ha a sebesség nagysága is változik, akkor a gyorsulásnak érintőmenti összetevője is van és az egész gyorsulás az érintőmenti és merőlegesen befelé mutató gyorsulásösszetevő eredője. Tehát görbevonalú mozgás esetében a gyorsulás mindig a pálya homorú oldala felé irányul. Így van ez most is. Amikor az inga tömegét elengedjük a vízszintes helyzetből, egy pillanatig szabadesést végez és gyorsulása g, függőlegesen lefelé irányítva. A pálya legalsó részén a sebesség egy pillanatig állandó, a gyorsulás ekkor merőleges a pályára, függőlegesen felfelé mutat. Belátható, hogy e két helyzet között kell egy olyannak lennie, amikor a gyorsulás vízszintes.



2. ábra

Tanulságos, ha tanulmányozzuk a gyorsulás alakulását végig az inga pályája mentén (2. ábra). A gyorsulás teljes nagyságát (1)-ből és (2)-ből kapjuk meg:

$$a = \sqrt{a_f^2 + a_v^2} = g\sqrt{(1 - 3\cos^2\alpha)^2 + 9\sin^2\alpha\,\cos^2\alpha} = $$
$$= g\sqrt{4 - 3\sin^2\alpha}.$$

Az eredő gyorsulás vízszintessel alkotott, lefelé mutató ε szögét (1) és (2) osztásával kapjuk:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{a_f}{a_v} = \frac{1 - 3\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}.$$

A 2. ábra nyilai az eszerint számított gyorsulásokat tüntetik fel. A szaggatott nyilak a sebességeket mutatják.

Ha az ingát nem 90°-os, hanem valamilyen α_0 helyzetből indítjuk el, akkor így módosul a sebesség kifejezése:

$$v = \sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)},$$

ennek felhasználásával a vízszintes gyorsulás helyzetét megadó szögre:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha_0 + \sqrt{3 + \cos^2\alpha_0}}{3}.$$