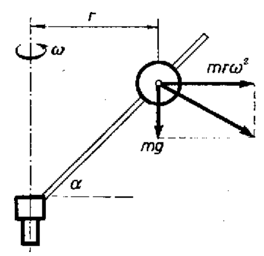
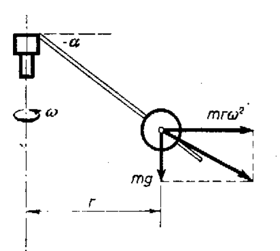
I. megoldás. Vizsgálatunkhoz a rendszerrel együtt forgó koordináta-rendszert választjuk. Súrlódásmentes esetben a kényszererőn kívül a tolósúlyra két erő hat: súly és a centrifugális erő. Egyensúly akkor van, ha ezen erők rúdirányú vetületeinek összege 0, hiszen a kényszererő a rúdra mindig merőleges. Pozitívnak választva a kifelé mutató irányt:

(1) $$mr\omega^2\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0, \quad \text{és innen} \quad r = \frac{g}{\omega^2}\mathrm{tg}\ \alpha.$$

Világos, hogy nagyobb r-nél csak a centrifugális erő nő meg, és ez r-et tovább igyekszik növelni. Ezért az egyensúly labilis. Mivel $r > 0$, ezért egyensúly csak akkor lehet, ha $\alpha > 0$, tehát a rúd nem lehet vízszintes, és nem is mutathat lefelé. (Az $r \le 0$ eset fizikailag értelmetlen, az $\omega = 0$ pedig a közönséges lejtőt jelenti, így ezekkel nem foglalkozunk.)



1. ábra



2. ábra

A súrlódásos esetben az egyensúly feltétele az, hogy a centrifugális és a súlyerő rúdirányú komponenseinek összege abszolút értékben ne legyen nagyobb a maximális súrlódási erőnél. A maximális súrlódási erőt úgy kapjuk meg, hogy a centrifugális és a súlyerő rúdra merőleges komponensei összegének abszolút értékét szorozzuk a μ súrlódási együtthatóval. (Azért az abszolút értékét, mert a rúd egyik oldalát pozitívnak választva, a nyomóerők összege negatív is lehet. Pl. az 1. ábrán látható esetben pozitív α-nál ugyan mindig pozitív a nyomóerő, de negatív α-nál – ha a centrifugális erő elég nagy – már negatívvá válhat (l. a 2. ábrát!). Márpedig a negatív nyomóerő által előidézett súrlódási erő is ugyanolyan, mint a pozitív által előidézett, hiszen az irányát nem a kiváltó nyomóerő iránya, hanem a megakadályozandó mozgás iránya szabja, meg.) Ezek figyelembe vételével az egyensúly szükséges és elegendő feltétele:

$$|r\omega^2\cos\alpha - g\sin\alpha| \le \mu|g\cos\alpha + r\omega^2\sin\alpha|.$$

Mivel $-90° < \alpha < 90°$ és $\omega \ne 0$, azért oszthatunk a határozottan pozitív $\omega^2\cos\alpha$-val:

$$\left|r - \frac{g}{\omega^2}\mathrm{tg}\ \alpha\right| \le \mu\left|\frac{g}{\omega^2} + r\ \mathrm{tg}\ \alpha\right|.$$

Két esetet kell megkülönböztetnünk:

A) $\alpha \ge 0$. Ekkor a jobb oldali abszolút érték jelben álló kifejezése pozitív, ezért az abszolút érték jele elhagyható. A bal oldali abszolút értéket kettős egyenlőtlenséggel helyettesítjük:

$$-\mu\frac{g}{\omega^2} - \mu r\ \mathrm{tg}\ \alpha \le r - \frac{g}{\omega^2}\mathrm{tg}\ \alpha \le \mu\frac{g}{\omega^2} + \mu r\ \mathrm{tg}\ \alpha.$$

Az első egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk:

$$r(1 + \mu\ \mathrm{tg}\ \alpha) \ge (\mathrm{tg}\ \alpha - \mu)g/\omega^2.$$

Mivel μ is, $\mathrm{tg}\ \alpha$ is pozitív, azért $1 + \mu\ \mathrm{tg}\ \alpha$ annál inkább, és így az egyenlőtlenséget oszthatjuk vele:

$$r \ge \frac{g}{\omega^2}\frac{\mathrm{tg}\ \alpha - \mu}{1 + \mu\ \mathrm{tg}\ \alpha}.$$

A másik egyenlőtlenséggel nem járhatunk el úgy, csak akkor, ha $\mu < \mathrm{ctg}\ \alpha$, mert itt $(1-\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha)$-val kell osztani. Ebben az esetben tehát az egyensúly feltétele:

$$\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\ \alpha-\mu}{1+\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha}\le r\le\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\ \alpha+\mu}{1-\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha}. \tag{2 a–b}$$

Ha $\mu > \mathrm{tg}\ \alpha$, akkor a második egyenlőtlenség semmitmondóvá válik. Ekkor ugyanis a negatív $(1-\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha)$-val osztva megfordul az egyenlőtlenség:

$$r\ge\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\ \alpha+\mu}{1-\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha},$$

ami nyilván mindig teljesül, lévén a bal oldal pozitív, a jobb oldal pedig negatív. A $\mu > \mathrm{tg}\ \alpha$ esetben tehát nincs felső korlát r-re.

B) $\alpha < 0$. Most a bal oldali abszolút érték hagyható el, az így kapott egyenlőtlenséget most is szétbonthatjuk két egyenlőtlenségre, most azonban nem kell mindkettőnek teljesülnie, az egyensúlyhoz elég, ha az egyik teljesül.

Az első:

$$r(1-\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha)\le(\mathrm{tg}\ \alpha+\mu)g/\omega^2.$$

Mivel most $\mathrm{tg}\ \alpha < 0$, azért $1-\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha$ pozitív, és így oszthatunk vele. Az egyensúlynak tehát elégséges feltétele:

$$r\le\frac{g}{\omega^2}\frac{\mathrm{tg}\ \alpha+\mu}{1-\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha}. \tag{3 a}$$

A második:

$$r(1+\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha)\le(\mathrm{tg}\ \alpha-\mu)g/\omega^2.$$

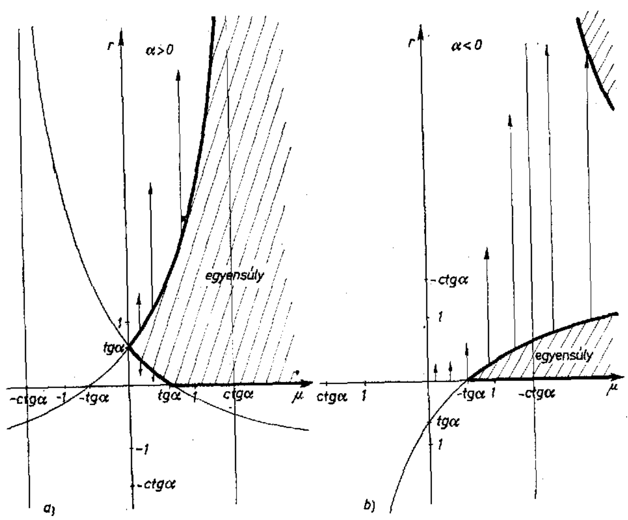
Itt további két eset lehetséges. Ha $\mu < -\mathrm{ctg}\ \alpha$, akkor kielégíthetetlen egyenlőtlenséget kapunk, lévén bal oldala pozitív, jobb oldalának számlálója negatív, nevezője pozitív:

$$r\le\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{tg}\ \alpha-\mu}{1+\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha}.$$

Amennyiben azonban $\mu > -\mathrm{ctg}\ \alpha$, az egyenlőtlenség megfordul, és az egyensúly egy további elégséges feltételét szolgáltatja:

$$r\ge\frac{g}{\omega^2}\frac{\mathrm{tg}\ \alpha-\mu}{1+\mu\ \mathrm{tg}\ \alpha}. \tag{3 b}$$

Az egyensúlyi viszonyok igen szemléletesen ábrázolhatók (3. ábra). Az ábrán a nyilak azt jelölik, hogy a súly a nem–egyensúlyi helyzetéből merre mozdul el. A diagramon r-et g/ω^2 egységekben ábrázoltuk!



3. ábra

Gnädig Péter (Bp., Táncsics M. g. IV. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A fenti eredményeknek igen szemléletes jelentés adható. Jelöljük ui. μ-t $\mathrm{tg}\ \varphi$-vel. (Ismeretes, hogy φ a súrlódási határszög.) Ekkor az egyenlőtlenségekben mindenütt $\mathrm{tg}(\alpha+\varphi)$, ill. $\mathrm{tg}(\alpha-\varphi)$ lép fel. Ennek fizikai oka a következő. A forgó rendszerből nem tudjuk megkülönböztetni a gravitációs és a centrifugális erőt. Ezért függőleges iránynak a két erő eredőjének irányát érezzük. Az így meghatározott vízszintes iránnyal maximálisan φ szöget zárhat be a rúd – a súrlódási határszög definíciója szerint – anélkül, hogy a súly elmozdulna. Ha azonban nem α-t, hanem r-et változtatjuk, akkor ezzel együtt változik a helyi vízszintes is. Ezt nyilván (1) írja le, r-et tehát addig változtathatjuk, amíg ezáltal a helyi vízszintes nem tér el φ-nél nagyobb szöggel a rúdtól. Ezek után a diszkusszió már könnyen elvégezhető, és megkapjuk a (2) és (3) feltételi egyenlőtlenségeket.

Mészáros Ildikó (Veszprém, Lovassy L. g. IV. o. t.)