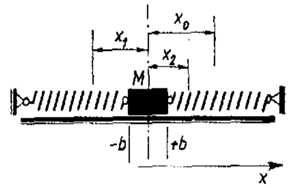
I. megoldás. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert az ábrán látható módon (ebben az esetben x_1 negatív szám), és írjuk fel a mozgásegyenletet, figyelembe véve, hogy a súrlódási erő nagysága ugyan állandó, de iránya a sebesség irányától függ.



Ha a test az x tengely irányításával egy irányban mozog, akkor

(1) $$Ma = -K_1 x - K_2 x - Mg\mu.$$

Ha a test az x tengely irányításával ellentétesen mozog, akkor

(2) $$Ma = -K_1 x - K_2 x + Mg\mu,$$

ahol M a test tömege, a a gyorsulása, K_1 és K_2 a két rugó direkciós ereje, feladatunkban $K_1 = K_2 = K$. Alakítsuk át az (1) és a (2) egyenletet.

$$Ma = -2\,Kx - Mg\mu, \quad \text{ill.} \quad Ma = -2\,Kx + Mg\mu,$$
$$Ma = -2K\left(x + \frac{Mg\mu}{2K}\right), \qquad Ma = -2K\left(x - \frac{Mg\mu}{2K}\right).$$

Az $\frac{Mg\mu}{2K}$ kifejezést jelöljük b-vel, így

(1a) $$Ma = -2K(x+b),$$
(2a) $$Ma = -2K(x-b).$$

Ezek az egyenletek külön-külön egy-egy *súrlódás nélküli (csillapítatlan)* rezgőmozgás egyenletei. Az (1a) egyenlet a $-b$, a (2a) egyenlet a b pont körüli rezgőmozgást írja le.

Nézzük meg a feladat szerint a test útját. A testet a kezdeti időpillanatban x_0 értékkel térítettük ki. Ebben az esetben a test az x tengely irányításával ellentétesen mozog, tehát a (2a) egyenlet vonatkozik rá. A b érték körül végez olyan mozgást, mint, a csillapítatlan rezgőmozgás fél periódusa. Tehát a b érték a két előjeles kitérés számtani közepe.

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = b, \quad x_0 + x_1 = 2b, \quad -x_1 = x_0 - 2b, \ |x_1| = x_0 - 2b.$$

A következő időszakban a test a másik irányba megy, tehát

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -b, \quad x_1 + x_2 = -2b, \quad x_2 = -x_1 - 2b, \quad x_2 = x_0 - 4b.$$

Ezt tovább folytatva látszik, hogy a kitérések egy számtani sorozat tagjai, melynél a különbség $-2b$. Tehát a harmadik kitérésre:

$$|x_3| = x_0 - 6b.$$

A feladat számértékeivel: $k = 50$ pond/cm $= 0{,}5$ newton/cm,

$$b = \frac{Mg\mu}{2K} = 0{,}5 \text{ cm}, \quad |x_3| = x_0 - 6b = 10 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 7 \text{ cm}.$$

Pláveczky György (Bp., I. István g. III. o. t.)

II. megoldás. Nézzük meg a feladatot a munkavégzés oldaláról. Ehhez először ki kell számítanunk a rugó potenciális energiáját. Csillapítatlan rezgőmozgás esetén a rugó teljes potenciális energiája mozgási energiává alakul. A rezgőmozgás út–idő, sebesség–idő és gyorsulás–idő függvényei:

(1) $$x = x_0 \sin\omega t$$
(2) $$v = x_0\,\omega \cos\omega t$$
(3) $$a = -x_0\,\omega^2 \sin\omega t = -x\omega^2.$$

A rezgőmozgás alapegyenlete: $ma = -Kx$, $a = -\frac{K}{m}x$,
ezt a (3)-mal összehasonlítva látjuk, hogy $\omega^2 = \frac{K}{m}$.

Ennek a rezgőmozgásnak a $t = 0$ időben nincs sebessége, tehát csak potenciális energiája van. Ez az $\omega t = 90°$-nak megfelelő időben teljes mértékben mozgási energiává alakul át, tehát az energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \cos^2 90° = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2.$$

x_0 kitéréskor a két rugó energiája $2 \cdot \frac{1}{2}Kx_0^2 = Kx_0^2$, x_1 kitéréskor a két rugó energiája $2 \cdot \frac{1}{2}Kx_1^2 = Kx_1^2$, közben súrlódás miatt végzett munka $L = Mg\mu(x_0 - x_1)$, (x_0, x_1, x_2 előjeles mennyiségek). A munkavégzés egyenlete

$$Kx_0^2 - Kx_1^2 = Mg\mu(x_0 - x_1), \quad \text{ebből}$$
$$K(x_0^2 - x_1^2) = Mg\mu(x_0 - x_1), \quad K(x_0 + x_1) = Mg\mu,$$
$$x_0 + x_1 = \frac{Mg\mu}{K}, \quad -x_1 = x_0 - \frac{Mg\mu}{K}, \quad |x_1| = x_0 - \frac{Mg\mu}{K}.$$

A következő mozgásrésznél

$$Kx_1^2 - Kx_2^2 = Mg\mu(x_2 - x_1),$$

ebből

$$x_1 + x_2 = -\frac{Mg\mu}{K}, \quad x_2 = -x_1 - \frac{Mg\mu}{K}, \quad x_2 = x_0 - 2\frac{Mg\mu}{K}.$$

Láthatjuk, hogy

$$|x_3| = (x_0 - 3\frac{Mg\mu}{K}.$$

Számértékkel:

$$|x_3| = 10\ \text{cm} - 3\ \text{cm} = 7\ \text{cm}.$$

Lábadi Albert (Bp., Vörösmarty g. III. o. t.)