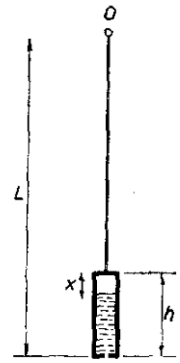
A kérdésre a választ a fizikai inga lengésidejének képlete adja meg: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}}$. Itt d a súlypont távolsága a tengelytől, I a tehetetlenségi nyomaték, m a tömeg. Figyelembe kell venni, miként változtatja a víz távozása a súlyponttávolságot és a tehetetlenségi nyomatékot.



1. ábra

O középpont körül lengő ingánk teljes hossza L, ebből az edény hossza h és megfigyelésünk pillanatában a kezdetben teljesen tele edényből már kifolyt x hosszúságban a folyadék (1. ábra). 1 cm hosszú folyadékréteg tömege s. Egyszerűség kedvéért legyen az edény tömege elhanyagolhatóan kicsiny a folyadékéhoz képest. Az 1. ábra által jellemzett helyzetben, amint azt hosszadalmas számítással meg lehet mutatni, a tehetetlenségi nyomaték:

(1) $$I = sL\left[L(h-x) - (h-x)^2 + \frac{(h-x)^3}{3L}\right],$$

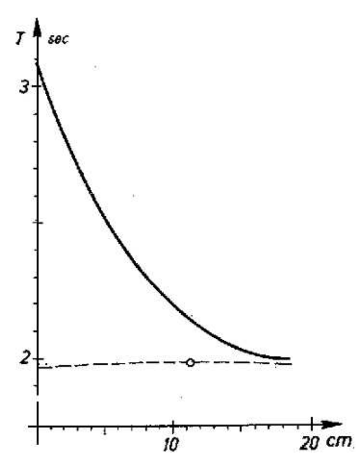
(2) a súlyponttávolság: $d = L - \dfrac{h-x}{2}$ és a tömeg:

(3) $$m = s(h-x).$$

Ezeket behelyettesítve az inga lengésidőképletébe:

(4) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L-(h-x)+\dfrac{(h-x)^2}{3L}}{g\left(1-\dfrac{h-x}{2L}\right)}}.$$

Ebből kell leolvasni, hogy T miként változik, miközben x 0-tól h-ig növekszik. A fizikai inga lengésidőképletében egyaránt szerepel a tömeg, a tehetetlenségi nyomaték és a súlyponttávolság, tehát pontos választ csak úgy adhatunk, ha mindhármat figyelembe vesszük.



2. ábra

Feltételezve, hogy például L=100 cm, h=20 cm és s=1 g/cm, akkor T változására a 2. ábra folytonos vonalát kapjuk. Az $x = h$ értékhez tartozó lengésidő konvergál az L hosszúságú fonálinga lengésidejéhez. Számítás nélkül, röviden annyit lehet mondani, hogy a fizika inga lengésidejét növeli, ha a tömegek közelebb kerülnek a tengelyhez, ennek megfelelően telt edény esetében nagyobb a lengésidő és kicsurgáskor a lengésidő folyamatosan csökken. A (4) függvény matematikai vizsgálata azt mutatja, hogy szélsőérték várható $x = h - 3L$ és $x = h - L$ értékeknél. Ezeknek csak akkor volna értelmük, ha az edény hosszú volna és a tengely fölé is felnyúlna.

Ezután foglalkozzunk azzal a bonyolultabb esettel, hogy az edény tömege nem elhanyagolható. Az edény M tömegének a súlypontja legyen λ távolságnyira a tengelytől. Mint rövidítő jelölést bevezetjük: $M/s = \mu$. Most képleteink így egészülnek ki:

$$I = sL\left[L(h-x) - (h-x)^2 + \frac{(h-x)^2}{3L} + \frac{\mu\lambda}{L}\right], \tag{1}$$

$$d = \frac{(h-x)\left(L - \dfrac{h-x}{2}\right) + \mu\lambda}{\mu + (h-x)}, \tag{2}$$

$$m = s[(h-x) + \mu], \tag{3}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L - (h-x) + \dfrac{(h-x)^2}{3L} + \dfrac{\mu\lambda^2}{L(h-x)}}{g\left(1 - \dfrac{h-x}{2L} + \dfrac{\mu\lambda}{L(h-x)}\right)}}. \tag{4}$$

A lengésidőnek a mennyiségektől való függését nagyon nehéz áttekinteni. Megmaradva az $L = 100$ cm, $h = 20$ cm, $c = 1$ g/cm adatok mellett, hozzávéve az edény részéről $\lambda = 90$ cm súlyponttávolságot és $M = 20$ gramm edénytömeget ($\mu = 20$ cm), a lengésidőnek x-től való függését a 2. ábra szaggatott vonala tünteti fel; ezen igen gyengén kialakuló maximum figyelhető meg $x = 12$ cm-nél. Ha hosszú fonálon viszonylag kis edény lóg, akkor fel vagyunk jogosítva a következő kijelentésre: a szerkezet közelítően fonálinga, ennek tömege az edény és víz együttes tömegéből tevődik össze, és távolsága egyenlőnek vehető az edény és víz közös súlypontjának távolságával. Ezért a lengésidő eleinte nő, mert az inga hosszabbodik, majd ismét csökken, mert az üres edény esetében a fonálhossz megint rövidebb lesz. A pontos (4) szerinti függvény szélsőértékének vizsgálata magasabbfokú egyenletre vezet.

Részben a következők dolgozatai alapján:

Pátkai Péter (Bp., Kandó K. techn. II. o. t.)
Lábadi Albert (Bp., Vörösmarty g. III. o. t.)
Szalay Sándor (Bp., Debrecen, Kossuth g. II. o. t.)