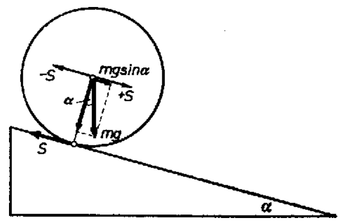
A golyóra az $mg \sin\alpha$ mozgató erő és az ismeretlen nagyságú S súrlódási erő hat. A golyó súlyának $mg\cos\alpha$ összetevőjét a lejtő kényszerereje kiegyenlíti és ezért nem vesszük számításba (1. ábra). A golyó középpontjában hozzáveszünk $+S$ és $-S$ erőket. A golyó középpontjában $mg\sin\alpha - S$ gyorsít, és létrehoz a gyorsulású mozgást, ezért a mozgástörvény alapján:

(1)
$$ma = mg\sin\alpha - S.$$



1. ábra

S súrlódási erő és a golyó középpontjában ható $-S$ forgatónyomatékot jelentenek, amely az I tehetetlenségi nyomatékú golyót β szöggyorsulással forgatja (az erőkar r, a golyó rádiusza). A forgómozgás alaptörvénye szerint:

(2)
$$\frac{Sr}{I} = \beta.$$

Végül a golyó sima legördüléséből következik, hogy

(3)
$$a = \beta r.$$

(Lásd A dinamikai példák megoldásáról című cikket a lap 1965. évi 2. számában.) Az (1), (2) és (3) egyenletrendszert megoldjuk a-ra, S-re és β-ra.

Az eredmény:

(4)
$$a = g\cdot\frac{m\sin\alpha}{m+\frac{I}{r^2}},$$

(5)
$$S = mg\cdot\frac{\frac{I}{r^2}\sin\alpha}{m+\frac{I}{r^2}},$$

(6)
$$\beta = \frac{g}{r}\cdot\frac{m\sin\alpha}{m+\frac{I}{r^2}}.$$

Mindez azonban csak addig igaz, amíg a súrlódási együttható elég nagy ahhoz, hogy az (5) által kívánt súrlódási erőt létre tudja hozni. A legnagyobb súrlódási erő, amely keletkezhet: $\mu mg\cos\alpha$. A súrlódási együttható kritikus értékét megkapjuk, ha ezt az (5) által megkívánt súrlódási erővel tesszük egyenlővé:

$$\mu_k mg\cos\alpha = mg\cdot\frac{\frac{I}{r^2}\sin\alpha}{m+\frac{I}{r^2}}.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása adja a súrlódási együttható kritikus értékét:

(7)
$$\mu_k = \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{\frac{I}{r^2}}{m+\frac{I}{r^2}}.$$

Ha a súrlódási együttható ennél kisebb, akkor a golyó megcsúszik, nem gördül le simán. Ekkor az (1) és (2) alatti mozgásegyenletekbe beírjuk a súrlódási erő igénybe vett $\mu mg\cos\alpha$ legnagyobb értékét:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$

(6')
$$\frac{\mu mgr\cos\alpha}{I} = \beta.$$

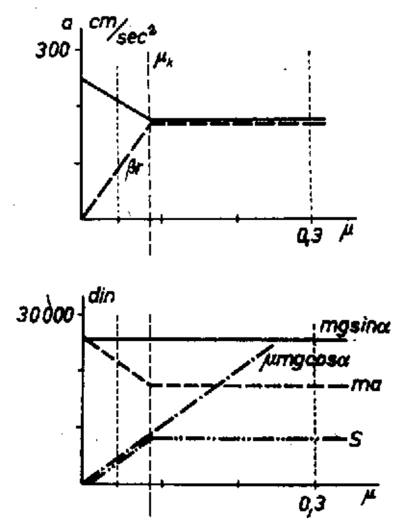
Ennek az egyenletrendszernek a megoldása β-ra maga (6'), a-ra pedig:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \tag{4'}$$

a súrlódási erő pedig $\mu mg\cos\alpha$.

Feladatunk számadatai mellett $\alpha = 15°$, $r = 2$ cm, $m = 100$ gramm, $I = 2mr^2/5 = 160\,\text{gcm}^2$. Így a kritikus súrlódási együttható $\mu_k = 0{,}076$. Az első esetben, $\mu = 0{,}3$ mellett a súrlódás elég nagy ahhoz, hogy a golyó simán gördüljön le; középpontjának gyorsulása $a = 5g\sin\alpha/7 = 174\,\text{cm}/\text{sec}^2$, a súrlódási erő $S = 2mg\sin\alpha/7 = 7982$ din, a szöggyorsulás $\beta = 5g\sin\alpha/7r = 87{,}1\,\text{sec}^{-2}$, mindez (4), (5) és (6) alapján. A második esetben, $\mu = 0{,}05$ mellett a golyó megcsúszik; ekkor (4') és (6') alapján $a = 206\,\text{cm}/\text{sec}^2$ és $\beta = 59{,}2\,\text{sec}^{-2}$, a súrlódási erő pedig 4735 din. A gyorsulásra kapott eredmények minden esetben függetlenek a tömegtől és a rádiusztól.

Jakab Mihály (Bp., Móricz Zs. g. III. o. t.)



2. ábra

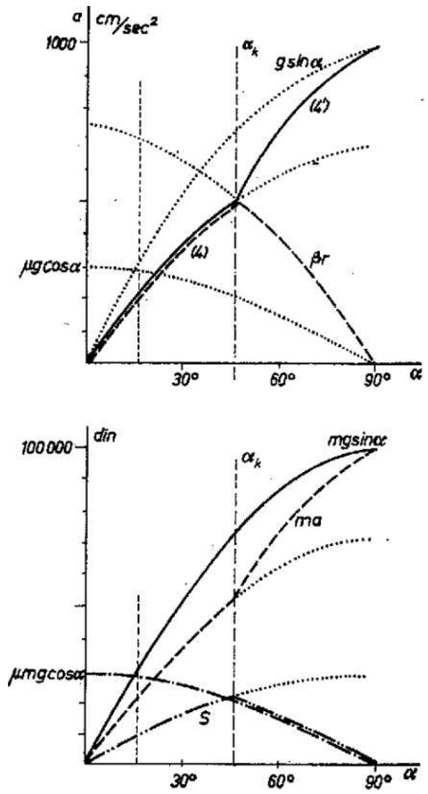
1. megjegyzés. Vizsgáljuk meg a jelenséget állandó $\alpha = 15°$-os szög mellett, de a μ súrlódási együttható értékétől függően (2. ábra). Az ábra felső részén a golyó középpontjának gyorsulását látjuk μ függvényében. Súrlódás nélkül $g\sin\alpha = 244\,\text{cm}/\text{sec}^2$ a gyorsulás, majd μ növekedtével (4') szerint csökken. A kritikus súrlódási együttható elérésétől fogva a mindvégig μ-től függetlenül a (4)-ből következő $174\,\text{cm}/\text{sec}^2$ marad. A rajz alsó részén az erők függését tanulmányozhatjuk. A folytonos vonal a végeredményben rendelkezésünkre álló $mg\sin\alpha$ erőt mutatja. Amíg a súrlódási együttható 0 és μ_k között van, az ma mozgató erő a-val arányosan csökken, az S súrlódási erő μ-vel arányosan növekszik, miközben összegük állandóan $mg\sin\alpha$ marad. μ_k feletti súrlódásnál ma és S a (4)-ből és (5)-ből következő állandó értékeket veszik fel. Látható, hogy ilyenkor nem vesszük igénybe a teljes, $\mu mg\cos\alpha$ által megadott lehetséges súrlódási erőt. A 2. ábra felső részén a szaggatott vonal βr forgásból származó kerületi gyorsulást tünteti fel; látható, hogy μ_k-ig egyre csökkenő megcsúszás történik, ezután sima legördülés.

Takács Gábor (Bp., Piarista g. IV. o. t.)

2. megjegyzés. Vizsgáljuk meg a jelenséget állandó $\mu = 0{,}3$ súrlódási együttható, de 0-tól 90°-ig növekvő α szög mellett (3. ábra). A megcsúszás határát jelentő kritikus hajlásszöget (7)-ből számítjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha_k = 3{,}5\mu = 1{,}05, \qquad \alpha_k = 46°24'.$$

Ennél laposabb lejtőkön sima legördülés, meredekebb lejtőkön megcsúszás következik be. A 3. ábra felső rajzán a folytonos vonal a gyorsulás értékét α_k-ig (4) szerint, α_k-nál meredekebb lejtőknél (4') szerint számítva tünteti fel. A 3. ábra alsó rajzán a folytonos vonal a teljes rendelkezésünkre álló $mg\sin\alpha$ erőt tünteti fel. A szaggatott vonal az a-val arányban levő ma gyorsító erőt ábrázolja. $\mu mg\cos\alpha$ a lehetséges maximális, S pedig az igénybe vett súrlódási erőt mutatja. A 3. ábra felső részén a szaggatott vonal a βr forgásból származó kerületi gyorsulást tünteti fel; látható, hogy 0-tól α_k-ig sima legördülés, meredekebb lejtőknél egyre növekvő megcsúszás lép fel.



3. ábra

3. megjegyzés. Megoldható a feladat a mechanikai energiamegmaradás törvényével is. A golyó helyzeti energiájának csökkenése egyenlő a végzett munkával. Abban az esetben, ha sima legördülésről van szó, a helyzeti energia csökkenése egyenlő a golyó haladó és forgó mozgásából származó energiák összegével; ekkor nem végzünk munkát a csúszó súrlódás ellen. Ha nincs sima legördülés, akkor az előbbi mozgási energia mellett a súrlódási erő ellen is végzünk munkát, amelynél az erő $\mu mg\cos\alpha$, az út a csúszva és gördülve megtett utak különbsége. Ugyanazokat az eredményeket kapjuk, mint az előbbi számítással. A sima gördülés határesetében a kétféle módon számított gyorsulás egyenlő.

Bodonhelyi Márta (Bp., Móra Ferenc g. IV. o. t.)