I. megoldás. t idő elteltével a két autó $r_1 - v_1t$, illetve $r_2 - v_2t$ távolságra van a kereszteződési ponttól. Az ABO háromszögre felírjuk a koszinusz tételt:

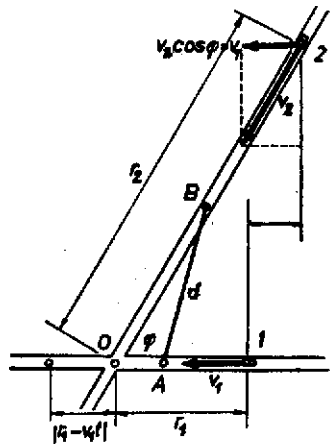
$$d^2 = (r_1 - v_1t)^2 + (r_2 - v_2t)^2 - 2(r_1 - v_1t)(r_2 - v_2t)\cos\varphi.$$

Rendezve

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi)t^2 - 2\left[v_1r_1 + v_2r_2 - (v_1r_2 + v_2r_1)\cos\varphi\right]t+$$
$$+r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi,$$

majd teljes négyzetté alakítva

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi)\left(t - \frac{v_1r_1 + v_2r_2 - (v_1r_2 + v_2r_1)\cos\varphi}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi}\right)^2 +$$
$$+r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi - \frac{\left[v_1r_1 + v_2r_2 - (v_1r_2 + v_2r_1)\cos\varphi\right]^2}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi}.$$



A távolság akkor a legkisebb, ha a távolság négyzete minimális. A jobb oldalnak akkor van minimuma, ha

$$t - \frac{v_1r_1 + v_2r_2 - (v_1r_2 + v_2r_1)\cos\varphi}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi} = 0, \quad \text{vagyis}$$
$$t = \frac{v_1r_1 + v_2r_2 - (v_1r_2 + v_2r_1)\cos\varphi}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi}.$$

Ekkor a távolság négyzete

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi -$$
$$-\frac{\left[v_1r_1 + v_2r_2 - (v_1r_2 + v_2r_1)\cos\varphi\right]^2}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi}.$$

Ha $v_2 = 2v_1$ és $r_2 = 3r_1$:

$$t = \frac{7 - 5\cos\varphi}{5 - 4\cos\varphi}\cdot\frac{r_1}{v_1}, \quad d^2 = \left[10 - 6\cos\varphi - \frac{(7 - 5\cos\varphi)^2}{5 - 4\cos\varphi}\right]r_1^2.$$

Numerikus adatokat behelyettesítve: $t = 3$ óra, $d = 50$ km.

Dékány István (Bp., Fazekas M. Gyak. gimn. II. o. t.)

II. megoldás. A numerikus adatokból látszik, hogy a második autó sebességének az első autó útjára eső vetülete megegyezik az első autó sebességével, mivel

$$2v_1\cos 60^\circ = v_1.$$

Így, ha a második autó a kereszteződési pontban van, akkor a távolságnak biztosan minimuma van, mert az első autó sebességének irányába eső távolság marad meg. Ebben az esetben:

$$r_2 = v_2t, \qquad t = \frac{r_2}{v_2}, \qquad \text{amiből} \qquad t = \frac{3r_1}{2v_2}.$$

Numerikus adatokkal

$$t = \frac{300\ \text{km}}{100\ \text{km/ó}} = 3\ \text{óra},$$

ekkor a távolság, mivel a második autó a találkozási pontban van:

$$|r_1 - v_1t| = 50\ \text{km}.$$

Bor Zsolt (Szeged, Ságvári E. gimn. II. o. t.)