I. megoldás. Az m tömegű testre két erő hat: súlya és a K kötélerő. Ezek hatására a gyorsulással mozog lefelé:

$$ma = mg - K. \tag{1}$$

A K kötélerő forgatónyomatéka a korong tengelyére $M_0 = Kr$. Ennek hatására a korong $\beta = \dfrac{a}{r}$ szöggyorsulással forog, hiszen a korong kerületi gyorsulása és az m tömegű test gyorsulása nyilván egyenlő. A korong tehetetlenségi nyomatéka $I = \dfrac{1}{2}Mr^2$. Helyettesítsük be ezeket az adatokat a forgómozgás dinamikai alapegyenletébe: $I\beta = M_0$, azaz

$$\frac{1}{2}Mr^2 \cdot \frac{a}{r} = Kr. \tag{2}$$

(1) és (2) két egyenlet a-ra és K-ra. Fejezzük ki belőle a-t!

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

A gyorsító test tehát egyenletesen gyorsulva mozog lefelé. Mialatt a korong n fordulatot tesz, $2nr\pi$ hosszú fonál csavarodik le. Az állandó a gyorsulással mozgó test nyugalmi állapotból indulva ezt az utat a keresett

$$t_n = \sqrt{\frac{4nr\pi}{a}} = \sqrt{\frac{2nr\pi(M+2m)}{mg}} \text{ idő alatt teszi meg.} \tag{3}$$

A numerikus adatokat behelyettesítve kapjuk, hogy $t_{10} = 12{,}74$ sec.

(3)-ból világos, hogy az idők úgy aránylanak egymáshoz, mint a fordulatszámok négyzetgyökei:

$$t_1 : t_2 : t_3 : \ldots : t_n = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \ldots : \sqrt{n}.$$

Harkányi Edit (Bp., Patrona Hungariae gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Írjuk fel a rendszerre az energiamegmaradás tételét! Válasszuk 0-nak azt a potenciális energiát, amellyel az m tömegű test az induláskor rendelkezett. Ez azt jelenti, hogy a rendszer összes energiája az induláskor 0. n fordulat után az m tömegű test $2nr\pi$-vel kerül lejjebb, helyzeti energiája tehát ekkor $-2nr\pi\, mg$ lesz. Ezen felül a testnek lesz még $1/2mv^2$ mozgási energiája, a korongnak pedig $1/2I\omega^2$ forgási energiája. Itt a korong tehetetlenségi nyomatéka: $I = 1/2Mr^2$, a szögsebessége pedig: $\omega = v/r$, hiszen a korong kerületi sebessége megegyezik a gyorsító test sebességével. Az összes energiának most is 0-nak kell lennie:

$$1/2mv^2 + 1/2 \cdot 1/2Mr^2 \cdot v^2/r^2 - 2nr\pi\, mg = 0, \quad \text{innen}: \; v = \sqrt{\frac{8nr\omega\, mg}{2m + M}}$$

Mivel az erőviszonyok a mozgás során szemmel láthatóan változatlanok, feltehetjük, hogy a gyorsító test állandó gyorsulással mozog. Akkor a keresett idő:

$$t_n = \frac{2 \cdot (2nr\pi)}{v} = \sqrt{\frac{2nr\pi(2m+M)}{mg}}.$$

Tovább az előző megoldáshoz hasonlóan.

Zichy László (Esztergom, Temesvári Pelbárt g. III. o. t.)