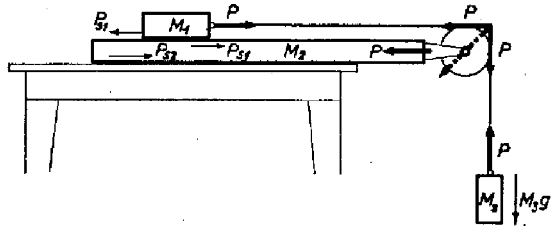
Legyen először minden súrlódási együttható nulla. A gyorsulások és a kötélerő ekkor csak a testek tömegétől és a gravitációs gyorsulástól függenek. A négy ismeretlen meghatározásra írjuk fel a mozgásegyenleteket. Ez három egyenletet szolgáltat (három testből áll a rendszer). A negyedik egyenletet a köztük fellépő geometriai kényszer fogja megadni: a súlytalan, abszolút hajlékony, de nyújthatatlan fonál a testek által megtett utak, illetőleg a gyorsulások között szab meg egy kapcsolatot.



A három mozgásegyenlet (l. az ábrát)

(1) $$M_1a_1 = P,$$

(2) $$M_2a_2 = P,$$

(3) $$M_3a_3 = M_3g - P.$$

A megtett utak:

$$s_1 = \frac{a_1}{2}t^2, \qquad s_2 = \frac{a_2}{2}t^2, \qquad s_3 = \frac{a_3}{2}t^2.$$

s_1 és s_2 megadják a vízszintes kötélrész rövidülését, s_3 pedig a függőleges szakasz növekedését. Mivel a kötél hossza mozgás közben nem változik,

$$s_1 + s_2 = s_3, \quad \text{ahonnan}$$

(4) $$a_1 + a_2 = a_3.$$

(4)-et (1), (2) és (3) alapján

$$\frac{P}{M_1} + \frac{P}{M_2} = \frac{M_3g - P}{M_3}$$

alakba írva adódik P értéke:

$$P = \frac{M_1M_2M_3}{M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3} \cdot g.$$

Ezt visszahelyettesítve megkapjuk a keresett gyorsulásokat:

$$a_1 = \frac{M_2M_3}{M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3} \cdot g, \quad a_2 = \frac{M_1M_3}{M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3} \cdot g,$$
$$a_3 = \left(1 - \frac{M_1M_2}{M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3}\right) \cdot g.$$

Az M_1 és M_2 tömegű testek egymáshoz viszonyított gyorsulása $a_1 + a_2$. Az indulástól számított s út megtételéhez szükséges t időt könnyen megkaphatjuk:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_1 + a_2}} = \sqrt{\frac{2s(M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3)}{g \cdot (M_2M_3 + M_1M_3)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2s}{g} \cdot \frac{M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3}{M_3(M_2 + M_1)}}.$$

Ha a lelógó kötélrész rövid, akkor a csiga mozgása következtében ez a kötélrész nem marad függőleges. Ekkor az M_3 tömegű test mozgása bonyolult görbe pályán történik, ahol a fellépő gyorsulások a hajlásszögtől és a sebességtől is függnek (centripetális erő görbevonalú mozgásnál!). Ezért a fenti meggondolások és eredmények csak hosszú kötél esetén érvényesek.

A feladat súrlódásos általánosítása azonos elvek alapján történhet, csak az az eset érdekes, ha az összes súrlódó erőt figyelembe vesszük.

Legyen az M_1 és M_2 tömegű testek közti súrlódási együttható μ_1, az M_2 tömegű test és az asztallap közti súrlódás együtthatója μ_2.

Ekkor a három test mozgásegyenlete:

$$\begin{aligned}
M_1a_1 &= P-\mu_1M_1g,\\
M_2a_2 &= P-\mu_1M_1g-\mu_2\big[(M_1+M_2)g+P\big],\\
M_3a_3 &= M_3g-P,
\end{aligned}$$

ahol figyelembe kellett venni az M_2 tömegű testre a felső lapján fellépő M_1-től származó súrlódó erőt, az asztallap és M_2 között fellépő súrlódó erőt, amelyet az M_2 tömeg, M_1 tömeg és az M_3 tömegtől származó $P=M_3(g-a)$ erők határoznak meg.

Végül a negyedik egyenlet továbbra is érvényes:

$$a_1+a_2=a_3.$$

Az egyenletek megoldása:

$$\frac{P-\mu_1M_1g}{M_1}+\frac{P-\mu_1M_1g-\mu_2\big[(M_1+M_2)g+P\big]}{M_2}=\frac{M_3g-P}{M_3},$$

ahonnan

$$\begin{aligned}
P &= \frac{M_1M_2M_3}{M_1M_2+M_2M_3+M_1M_3(1-\mu_2)}\left[1+\frac{(\mu_1+\mu_2)(M_1+M_2)}{M_2}\right]\cdot g,\\
a_1 &= \left\{\frac{M_2M_3}{M_1M_2+M_2M_3+M_1M_3(1-\mu_2)}\left[1+\frac{(\mu_1+\mu_2)(M_1+M_2)}{M_2}\right]-\mu_1\right\}\cdot g,\\
a_2 &= \left\{\frac{M_1M_3}{M_1M_2+M_2M_3+M_1M_3(1-\mu_2)}\left[1+\frac{(\mu_1+\mu_2)(M_1+M_2)}{M_2}\right](1-\mu_2)-\right.\\
&\qquad\left.-\left[\mu_2+\frac{M_1}{M_2}(\mu_1+\mu_2)\right]\right\}\cdot g,\\
a_3 &= \left\{1-\frac{M_1M_2}{M_1M_2+M_2M_3+M_1M_3(1-\mu_2)}\left[1+\frac{(\mu_1+\mu_2)(M_1+M_2)}{M_2}\right]\right\}\cdot g.
\end{aligned}$$

Az indulástól számítva az M_1 tömegű testnek az M_2-n mért s út megtételéhez szükséges ideje:

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g\{XY\cdot\big[M_2+M_1(1-\mu_2)\big]-(\mu_1+\mu_2)(1+M_1/M_2)\}}},$$

ahol

$$X=\frac{M_3}{M_1M_2+M_2M_3+M_1M_3(1-\mu_2)},\qquad Y=1+\frac{(\mu_1+\mu_2)(M_1+M_2)}{M_2}$$

Eddig minden további nélkül feltettük, hogy a testek mozognak. Ez nem magától értetődő, hiszen ha az adott tömegek esetén a súrlódási együttható nagy, akkor nem jön létre mozgás. Egyszerűség kedvéért legyen $\mu_1=\mu_2$. Mivel

$$P_{s1}=\mu_1M_1g,\quad \text{és}\quad P_{s2}=\mu_2\big[(M_1+M_2)g+P\big]$$

ezért $P_{s1}<P_{s2}$, és mozgás esetén $M_3g>P$ kell, hogy teljesüljön. (Gyorsulás esetén az egyenlőség érvényes.)

Ha $M_3g=P$, akkor M_3 és M_1 is egyenletesen mozog (miután meglöktük), M_2 pedig nyugalomban van. Ekkor $M_3g=P=P_{s1}$.

Ha $M_3g>P$, akkor M_1 is és M_3 is gyorsulva mozog, ebből következik, hogy $P>P_{s1}$. De igaz az is, hogy ha $M_3g>P_{s1}$, akkor $M_3g>P>P_{s1}$. Ahhoz, hogy M_3 és M_1 gyorsulva mozogjon, elég az, hogy $M_3g>P_{s1}$ legyen, amiből a súrlódási együtthatóra $\mu_1<\dfrac{M_3}{M_1}$ kikötés adódik. Hogy M_2 is mozogjon, kell, hogy

$$P_{s1}+P_{s2}<P\quad \text{igaz legyen.}$$

Egyenletes mozgáshoz $\mu_1M_1g+\mu_2\big[(M_1+M_2)g+P\big]=P$ szükséges, ebből $\mu_1=\mu_2=\mu$ esetben

$$\mu=\frac{P}{2M_1g+M_2g+P}.$$

Ahhoz, hogy M_2 gyorsuljon, kell, hogy

$$\mu<\frac{P}{2M_1g+M_2g+P}\ \text{teljesüljön.}$$

Magyar Gábor (Sopron, Berzsenyi D. g. IV. o. t.)

Megjegyzés: A feladat megoldható energiatétellel, ill. munkatétellel. Érvényes továbbá a vízszintes irányokra vonatkoztatva a mozgásmennyiség megmaradás tétele súrlódásmentes esetben (a függőleges sebességek vízszintes vetülete nulla). Figyeljük meg ellenőrzésként, hogy a súrlódásos megoldás $\mu_1 = \mu_2 = 0$ helyettesítéssel az első kérdésre adott válaszokat adja.

Holics László