a) A hatásfok a hasznos munka és a befektetett munka hányadosa, a mi esetünkben az emelési munka $L_{\text{em}} = mg \cdot \sin\alpha \cdot s$ és a teljes P erő $L_{\text{ö}} = P \cdot s$ munkájának viszonya: $\eta = mg \cdot \sin\alpha / P$.

A végsebességet az egyenletesen gyorsuló, 0 kezdősebességű mozgás sebesség-út összefüggéséből számítjuk. A mozgásegyenlet szerint $a = \dfrac{\sum_i P_i}{m}$, ahol $\sum P_i = P - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$, és így a keresett végsebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha} \cdot \frac{P - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m}}.$$

b) Az s' úton nyert sebesség a hátralevő $s - s'$ úton zérusra csökken, vagyis a sebességnövekedés és sebességcsökkenés egymással egyenlők. Írhatjuk, hogy: $\Delta v_1 = \Delta v_2$, azaz

$$\sqrt{2\left(\frac{P}{m} - g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha\right)s'} = \sqrt{-2(-g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)(s - s')}.$$

Négyzetre emelés után:

$$\left(\frac{P}{m} - g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha\right)s' = -(-g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)(s - s'),$$

ahonnan a keresett

$$s' = \frac{m}{P}(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)s = \frac{mgh(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha)}{P}$$

A hatásfok

$$\eta' = \frac{mgh}{mgh(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha)} = \frac{1}{1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha}.$$

c) A harmadik eset visszavezethető a másodikra $s' = s/2$ kikötéssel, így

$$\frac{m}{P_{1/2}}(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha) = \frac{1}{2}\text{-ből}$$

$$P_{1/2} = 2\text{mg}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

és ebből a hatásfok:

$$\eta_{1/2} = \frac{mgs \cdot \sin\alpha}{2mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)s/2} = \frac{1}{1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha} = \eta',$$

vagyis azonos az előző esetével. Érdemes megemlíteni, hogy a hatásfok a két esetben független mind a tömegtől, mind a P erőtől!

d) Tegyük fel, hogy a P erő végig $h/\sin\alpha$ úton hat. (A kapott általános összefüggés alapján könnyű a többi esetet megvizsgálni, pl. hogy csak $s - \Delta s$ úton hat az erő, és azt, hogy a súrlódási együttható végig, vagy csak a Δs szakasztól kezdve nulla, vagy végig nem nulla.) A rugóban felhalmozott energia a benne fellépő kezdeti és végső rugalmassági erő számtani közepével kifejezett munkával mérhető, azaz $E_r = \dfrac{P'\Delta s}{2}$, ahol P' erő a P erő gyorsításra maradó részéből, és abból az erőből tevődik össze, amely a testet Δs szakaszon v sebességről éppen 0 sebességre csökkenti. Ennek értéke csak a rugó direkciós erejének ismeretében volna kiszámítható, mivel azonban a változó erő hatására létrejövő gyorsulás értéke szintén változó, így változó tehetetlenségi ellenállás ($-ma$) jön létre. Ennek kiszámítását elkerülhetjük az energiatétel figyelembevételével.

Mivel P végig hat, a teljes s úton végzett munkája $P \cdot s$. Ez az út végig emelésre, súrlódásra és rugóösszenyomásra fordítódik. (A gyorsításra fordított munkát visszakapjuk a lassulásnál, ami segít a rugó összenyomásában). Így, ha a végig ható P erő összes munkájából az első kettőt levonjuk, a rugóban felhalmozott energiát kapjuk, azaz:

$$E_r = P \cdot s - mgs \cdot \sin\alpha - \mu mgs \cdot \cos\alpha.$$

Ez független a Δs összenyomástól. Δs-et tetszőlegesen megköthetjük, de ekkor a rugó direkciós erejét is megszabjuk. Azáltal, hogy megköveteljük, a test éppen álljon meg a rugó hatására az s út végén, fenn kell állnia, hogy P'-vel, a rugóban fellépő maximális deformációs erővel számolt munka megegyezzék az előbb számolt energiával, így

$$\frac{P'\Delta s}{2} = Ps - \mu\, mgs\,\cos\alpha - mgs\,\sin\alpha.$$

Ebből a maximális rugóerő $P' = \dfrac{2s}{\Delta s}\big[P - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\big]$. Ez általában nagyobb, mint $P - mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$ (a súrlódó erő itt jelet vált), így a test természetesen nem marad egyensúlyban, hanem a rugó visszadobja. Meg lehet választani a feltételeket úgy, hogy a test fenn nyugalomban maradjon.

Az általunk választott rugó direkciós ereje

$$D=-\frac{P'}{\Delta s},\quad \text{vagyis}\quad D=-\frac{2s}{(\Delta s)^2}\big[P-mg(\sin\alpha+\mu\,\cos\alpha)\big].$$

A hatásfok értéke, ha a rugóban felhalmozott energiát hasznos energiának vesszük:

$$\eta=\frac{P\cdot s-\mu mgs\,\cos\alpha}{Ps}.$$

Ha csak az emelési munka számít hasznosnak:

$$\eta=\frac{mgh}{P\cdot s}.$$

Vizsgáljuk meg a minimális és maximális erők lehetőségét (a b)) esetben).
A folyamat elején a test a lejtő alján áll. Amíg a P erő nagysága 0-tól $P^*=mg(\sin\alpha+\cos\alpha)$-ig terjed, a testre ható erők egyensúlyban vannak, a test még nem indul meg. Ha azonban ekkor megnövelnénk egy ΔP erőhatással a P^* erőt (ΔP értéke tetszőlegesen kicsi lehet, de $\Delta P\neq 0$), a test h magasságba jut, ha a $P=P^*+\Delta P$ erő elég hosszú ideig hat. $P=P^*+\Delta P$ tetszőlegesen megközelítheti az $mg(\sin\alpha+\cos\alpha)$ értéket (ΔP mind kisebbre választásával), de nem érheti el: tehát van *bármely* még elindító erőnél kisebb ilyen tulajdonságú erő, azaz legkisebb erő *nincs.*

Az erő maximumáról sem beszélhetünk. A b) feladat alapján s' képletéből: $Ps'=mgh(1+\mu\operatorname{ctg}\alpha)=\text{konstans}$. Ha $\Delta s=s'$ minden határon túl csökken zérus felé, a P húzóerő minden határon túl növekszik végtelen felé. Ezek szerint tehát az erő maximumáról sem beszélhetünk.

Bense Imre (Esztergom, Temesvári P. g. IV. o. t.)
Vadász István (Bp., Radnóti M. gyak. g. III. o. t.)
és *Pelikán József* (Bp., Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)
dolgozata alapján