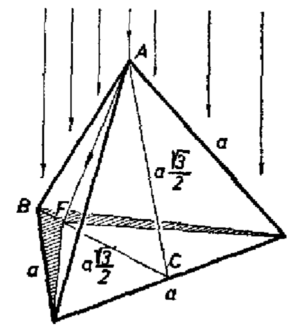
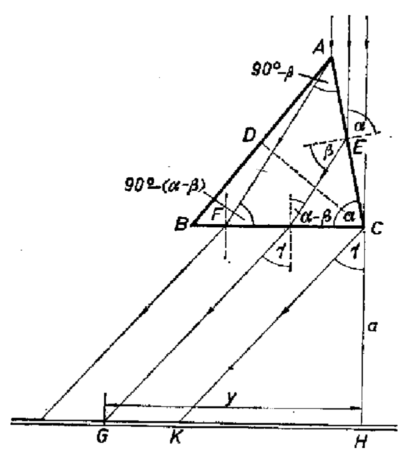
Nyilvánvaló, hogy a tetraéder úgy fog elhelyezkedni, hogy alaplapja vízszintes lesz. Elég tehát megvizsgálni az egyik lapra beeső fénysugarak útját, és a kapott eredményt a többi lapra alkalmazni.



1. ábra

Törés során a fénysugár nem lép ki az általa és a beesési merőleges által meghatározott síkból. Ez a sík – az első törés esetében – nyilván a lapra merőleges egyik függőleges sík lesz. Ha a fénysugár ezután az alapon törik, akkor szemmel láthatóan továbbra sem lép ki e síkból. Ha tehát belátjuk, hogy valamennyi megtört fénysugár másodszor az alapon törik, akkor elég a fénysugár útját valamelyik síkban végigkövetni. Válasszuk azt a síkot, amelyik tartalmazza a szemben lévő tetraéderélt. Jól látszik, hogy a tetraédert az egyik oldalélében, egyik oldallapjának magasságvonalában és alaplapjának magasságvonalában metszi.

Legyen a tetraéder éle a. Akkor $\overline{AC}=\overline{BC}=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



2. ábra

Az ADC háromszögből $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, így $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Innen $\sin\alpha=2\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$, és $\cos\alpha=\sqrt{1-\dfrac{8}{9}}=\dfrac{1}{3}$. Az E pontban beeső fénysugár beesési szöge α, mivel ez az ACB szögnek merőleges szárú szöge, a törési szög legyen β.

A Snellius–Descartes–törvény szerint $\sin\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}$. Számítsuk ki $\cos\beta$-t is: $\cos\beta=\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Hova jutnak a megtört fénysugarak? Az alaplap síkjában nyilván oda, ahol az alapon az oldallapnak ilyen irányú sugarakkal vetett árnyéka van. Ez az árnyék nyilván egyenlőszárú háromszög lesz, amelynek alapja a tetraéder alapéle, csúcsa pedig az alaplap magasságán van. Számítsuk ki az árnyékháromszög magasságát! Ha ez kisebb lesz az alaplap $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660a$ magasságánál, akkor teljesül az, hogy valamennyi megtört fénysugár az alapon törik másodszor. Az árnyékháromszög magassága: $x=\overline{FC}$.

Írjuk fel a sinus–tételt az AFC háromszögre:

$$\frac{x}{a\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sin(90°-\beta)}{\sin\left[90°-(\alpha-\beta)\right]},$$

innen

$$x=a\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sqrt{135}\left(\sqrt{128}-\sqrt{20}\right)}{108}\,a\approx 0{,}7360a<0{,}8660a,$$

tehát a feltétel teljesül.

Az alaplapra beeső fénysugarak beesési szöge $(\alpha-\beta)$, s jelöljük a törési szöget γ-val. A törési törvény szerint:

$$\sin\gamma=\sqrt{2}\sin(\alpha-\beta)=\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{80}-\sqrt{8}}{9}.$$

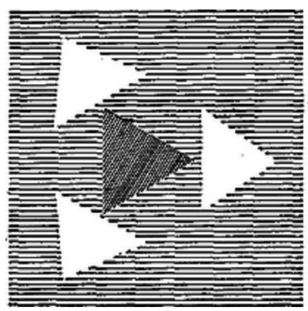
Milyen képet kapunk az alaplapon? Nyilván egy háromszöget, amely az előbbi árnyékháromszöggel egybevágó lesz, és úgy jön létre, hogy azt az ernyőre vetítjük a másodszor is megtört fénysugarakkal. Határozzuk meg az eltolódás y nagyságát! A CGH háromszögből

$$y=a\operatorname{tg}\gamma=a\frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}=\frac{\sqrt{80}-\sqrt{8}}{\sqrt{16\sqrt{10}-7}}a\approx 0{,}9263\ a.$$

Az ernyőn tehát a tetraéder alatt árnyékot kapunk, az ernyő többi része általában egyszer van megvilágítva. Kétszeres megvilágítást tapasztalunk az ábrán látható 3 egyenlőszárú háromszögben, melyeknek magassága x, alapjuk a, és alapjuk távolsága a tetraéder árnyékának csúcsától:

$$d=\overline{GK}=y-\frac{3}{2}a=0{,}0603\ a.$$

Esetünkben $x=7{,}360$ cm, $y=9{,}263$ cm, és $d=0{,}603$ cm.



3. ábra

Hegedűs Csaba (Nagykanizsa, Landler J. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Figyelembe vehetjük, hogy az oldallapra eső fénysugarak egy része visszaverődik. Ezek ismét három háromszöget alkotnak. További képeket adhatnak az alaplapról, majd az oldallapokról visszaverődő sugarak, ezek azonban már olyan gyengék lesznek, hogy nyugodtan figyelmen kívül hagyhatjuk őket.

Szabó Péter Pál (Siklós, Táncsics M. g. III. o. t.)