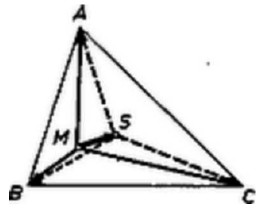
I. megoldás. A feladatban szereplő $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ erőket a vektorösszegezés szabályai szerint felbonthatjuk a következőképpen (1. ábra):



1. ábra

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA},$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SB},$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC}.$$

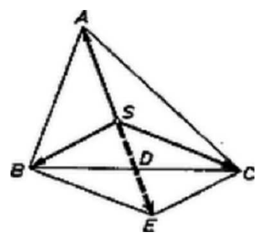
A három egyenletet összeadva:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}.$$

A feladat azt bizonyítani, hogy

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MS}.$$

Ha bizonyítani tudjuk, hogy $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC} = 0$, akkor állításunk igaz. Paralelogramma módszerrel megszerkesztve az $\overrightarrow{SB}$ és $\overrightarrow{SC}$ erők eredőjét (2. ábra), $\overrightarrow{SE}$ erőt kapjuk. Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért a D pont felezőpontja mind az $\overline{SE}$, mind a $\overline{BC}$ szakasznak.



2. ábra

$\overrightarrow{SE}$ tehát egy egyenesbe esik $\overrightarrow{SA}$-val, mert az AD egyenes a BC oldalhoz tartozó súlyvonal.

A súlypont $2:1$ arányban osztja a súlyvonalat, tehát

$$\overrightarrow{SA} = -2\,\overrightarrow{SD} = -\overrightarrow{SE} = -(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

Rendezve

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 0,$$

így

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MS}.$$

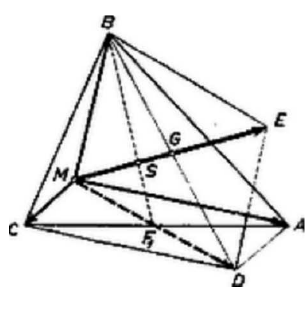
Sólyom Irén (Bp., Veres Pálné gimn. II. o. t.)

Megjegyzés: A bizonyításból látható, hogy M-nek nem kell az $ABC_{\triangle}$ síkjában lennie.

Treer Ferenc (Bp., Piarista gimn. II. o. t.)

II. megoldás. A paralelogramma tétel szerint összegezve (3. ábra):

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}, \qquad \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ME}.$$



3. ábra

Az ABC_Δ CA oldala és az MD szakasz felezik egymást, mert az $AMCD$ paralelogramma átlói. (A metszéspont F_1.)

D és B pontokat összekötve kapjuk az MDB háromszöget. A BF_1 szakasz súlyvonala ABC_Δ-nek és MDB_Δ-nek egyaránt, mert

$$CF_1 = F_1A \qquad \text{és} \qquad MF_1 = F_1D.$$

Az ME és BD metszéspontját G-vel jelölve látható, hogy MG is súlyvonala MDB_Δ-nek, mert $BG = GD$.

MG és BF_1 metszéspontja (S) tehát súlypontja MDB_Δ-nek, és mivel a BF_1 súlyvonal az ABC_Δ-ben is, és S BF_1-et $2:1$ arányban osztja, ezért S ABC_Δ-nek is súlypontja. Ezért ME, az MG meghosszabbítása átmegy az ABC_Δ S súlypontján.

Látható, hogy $\overrightarrow{ME}$ eredő háromszorosa az $\overrightarrow{MS}$ vektornak.

Lóczy István (Győr, Mayer L. gimn. II. o. t.)