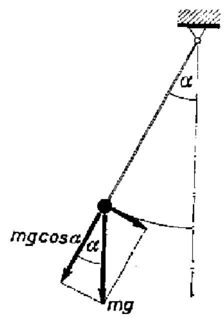
Az impulzusmomentum megmaradása az inga esetében nem érvényes, mert a rendszer nem zárt: a testre ható nehézségi erő forgatónyomatéka (a forgáspontra vonatkoztatva) nem állandóan zérus. Ez nyilvánvaló is, hiszen a szélső helyzetekben az impulzusmomentum zérus, középen maximális nagyságú. Így, bár a fonalhosszat változtatható erő forgatónyomatéka zérus (a tengelyben hat), az amplitudónövelést az impulzusmomentum megmaradásának tétele nem tiltja, hiszen e tételnek az ingához mint nem zárt rendszerhez semmi köze. Így a megoldás során nem is alkalmazható. Feltesszük, hogy a hosszváltoztatást „lassan” hajtjuk végre. Ezen azt értjük, hogy nincs rugalmatlan ütközést jelentő rántás vagy a fonál hirtelen meglazulása, továbbá a fellépő hosszváltoztató gyorsulások oly kicsik, hogy a fonálban ható erőt lényegesen nem befolyásolják. (Ez azt jelenti, hogy g-hez viszonyítva kis gyorsulásokkal dolgozunk.)

Az energiamegmaradás elvét alkalmazzuk. Amikor a fonalra a legnagyobb erő hat (középen), felhúzzuk egy kicsit a fonalat, majd a legkisebb feszítő erő mellett (szélen) visszaengedjük. Így energiát közlünk a lengő rendszerrel. Amikor középen kicsiny Δl hosszal a testet felhúzzuk, akkor $mg\ \Delta l$ helyzeti energiát nyert a rendszer. A szélen a fonalat csak $mg\cos\alpha$ erő feszíti (l. az ábrát) tehát ha itt lassan visszaengedjük, akkor a lengőrendszer rajtunk $mg\cos\alpha\cdot\Delta l$ munkát végez, azaz ennyi energiát veszít. De most az ingahossz már az eredeti, így a lengésamplitudó növekedésével raktározhatja csak az inga a felvett $\Delta E = mg\Delta\ell - mg\cos\alpha\cdot\Delta\ell = mg\Delta\ell(1-\cos\alpha)$ energiát.



Ismeretes, hogy ha a maximális szögkitérés α (radiánban), akkor a lengő test amplitudója $A = \ell\alpha$ (ℓ az ingahossz, α kicsi), így a maximális sebesség $v = A\omega = \ell\alpha\omega$ (ω a körfrekvencia: $\omega = \sqrt{g/\ell}$) tehát az inga energiája:

$$E = mv^2/2 = m(\ell\,\alpha\,\omega)^2/2 = mg\ell\alpha^2/2. \tag{1}$$

(Ugyanis amikor középen v maximális, akkor a helyzeti energia 0-nak vehető, a szélső helyzetben pedig csak helyzeti energia van. A kettő összege állandó a lengés során.) (1)-ből a maximális szögkitérés négyzete: $\alpha^2 = 2E/mg\ell$, míg a megnövekedett α' négyzete: $\alpha'^2 = \dfrac{2(E+\Delta E)}{mg\ell}$.

Ezzel lényegében a feladatot megoldottuk. A következőkben néhány matematikai közelítés útján áttekinthetőbbé tesszük eredményünket.

Legyen $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$. Ekkor:

$$\begin{aligned}\frac{2(E+\Delta E)}{mg\ell} - \frac{2E}{mg\ell} = \frac{2\Delta E}{mg\ell} &= \alpha'^2 - \alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha\cdot\Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2 - \alpha^2 = \\ &= 2\Delta\alpha\cdot\alpha + (\Delta\alpha)^2.\end{aligned}$$

Mivel $\Delta\alpha$ sokkal kisebb, mint α (hiszen $\Delta\ell$, ill. ΔE is kicsi ℓ-hez ill. E-hez képest), ezért az utolsó tag sokkal kisebb az előtte állónál, így elhanyagolható. Marad tehát

$$\frac{2\Delta E}{mg\ell} = 2\alpha\cdot\Delta\alpha.$$

Így az amplitudónövekedés:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta E}{\alpha mg\ell} = \frac{mg\Delta\ell(1-\cos\alpha)}{\alpha\cdot mg\ell} = \frac{\Delta\ell}{\ell}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta\ell}{\ell}\cdot\frac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\alpha}.$$

Mivel α kis szög, $\sin\dfrac{\alpha}{2} \approx \dfrac{\alpha}{2}$ (α-t radiánban mértük!), így végül:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta\ell}{\ell}\cdot\frac{2(\alpha/2)^2}{\alpha} = \frac{\Delta\ell}{\ell}\cdot\frac{\alpha}{2}, \quad \text{ill.} \quad \frac{\Delta A}{A} \approx \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell},$$

azaz a relatív amplitudónövekedés a relatív hosszváltoztatásnak közelítőleg a fele.

Mezei Ferenc