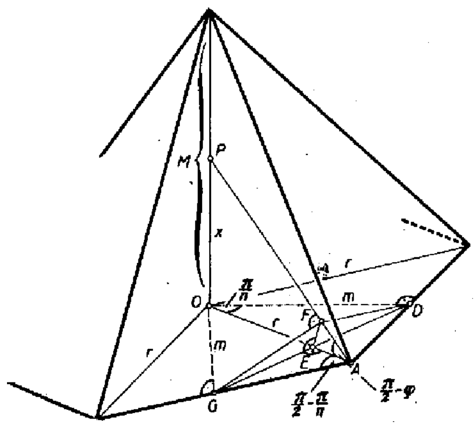
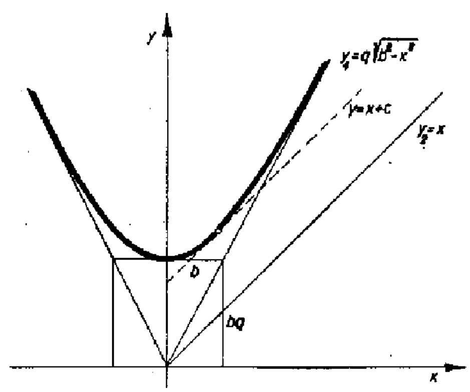
Legyen a szabályos n-szög r sugarú körbe írva és oldala $a_n = 2r\ \sin\ \pi/n = qr$. Egy függőleges és egy ferde síkú háromszög területének összege: $F = r/2(M-x) + a_n/2\sqrt{m^2+x^2} = rM/2 - rx/2 + qr/2 \cdot \sqrt{r^2 - q^2r^2/4 + x^2}$. Ezen mennyiség n-szeresének minimumhelyét kell vizsgálnunk. Ahelyett nyilván kereshetjük F, illetve $-\,rM/2$ állandó lévén $-\,qr/2\sqrt{r^2-q^2r^2/4+x^2} - xr/2$ minimumát, vagy ezt $r/2$-vel osztva, $b^2 = r^2(1-q^2/4)$ jelöléssel az

$$y = q\sqrt{b^2+x^2} - x \text{ függvény minimumhelyét.}$$



1. ábra



2. ábra

Az $y_1 = q\sqrt{b^2+x^2}$ függvény az $y_1^2/q^2 = b^2+x^2$, vagyis az $y_1^2/b^2q^2 - x^2/b^2 = 1$ hiperbola felső ágának egyenlete, ezen hiperbola valós tengelye az y-tengely. Az y_1 függvény és az $y_2 = x$ függvény különbségének minimumát keressük, ez a rajz szerint nyilván azon x érték mellett következik be, amelyben az $y_2 = x$ egyenessel párhuzamos $45°$-os egyenes érinti a felső hiperbolaágat. Ilyen egyenes csak $q > 1$ esetén létezik az ábra szerint. Tehát a $2\sin\pi/n \leqq 1$, vagyis az $n \geqq 6$ esetekben az y függvény a $0 \leqq x \leqq M$ intervallum valamelyik végénél, a 2 intervallumvégben felvett értéket összehasonlítva könnyen látható, hogy $x = M$ mellett veszi fel a legkisebb értéket. Ez azt jelenti, hogy ha a szappanhártya a feltételezett módon alakul ki, akkor ezen esetekben a palástot kell befednie.

Annak feltétele, hogy az $y = x + c$ egyenes érintse a hiperbolaágat, az, hogy a

$$c + x = q\sqrt{b^2+x^2}, \text{ tehát a}$$
$$(c+x)^2 = q^2(b^2+x^2)\text{-ből adódó}$$
$$(q^2-1)x^2 - 2cx + q^2b^2 - c^2 = 0$$

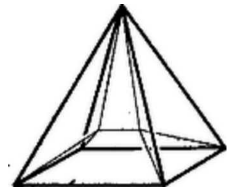
másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0 legyen (egyetlen közös pont):

$$4c^2 - 4(q^2-1)(q^2b^2-c^2) = 0, \text{ amiből}$$
$$c = b\sqrt{q^2-1}.$$

Így az érintési pont koordinátája ($x = -\dfrac{b}{2a}$ a másodfokú egyenlet együtthatóinak szokásos jelölésével):

$$x = \frac{2b\sqrt{q^2-1}}{2(q^2-1)} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{4-q^2}{q^2-1}} = r\frac{\cos\pi/n}{\sqrt{4\sin^2\pi/n - 1}} (n = 3,\ 4,\ 5)$$

behelyettesítések, egyszerűsítés után. Ebből x az $n = 4$, 5 speciális esetekre is könnyen kiszámítható.



3. ábra

Most nézzük meg, mekkora x mellett lehetnek 120°-os lapszögek. Ha $n \geqq 4$, 120°-os lapszögekről a függőleges síkok esetében nyilvánvalóan nem beszélhetünk. Egy ferde élhez csatlakozó lapoknál pedig a szimmetriát figyelembe véve elegendő, ha a két ferde sík szöge 120°. Képzeljük úgy, hogy két szomszédos alapél felezéspontján át (D, G) az AP élre merőleges síkot fektetünk, ez OA-t E-ben, AP-t F-ben metszi, az alappal φ szöget alkot. $EA\sphericalangle = \pi(2-\pi)n$, melynek egyik szára DE-vel derékszöget alkot, az előbb mondott síkon vett merőleges vetülete $EFD\sphericalangle = \pi/3$ kell, hogy legyen; itt $EF \perp DE$ a szimmetriaviszonyok miatt. Ezért DE-t egységnek tekintve $AE = \operatorname{ctg}(\pi(2-\pi)n) = \operatorname{tg}\pi/n$, $EF = \operatorname{ctg}\pi/3 = \sqrt{3}$, tehát az $AEF\triangle$

$-bl\cos\varphi = \sin(\pi/2-\varphi) = EF = \sqrt{3}/\operatorname{tg}\pi/n$. Azonban

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2/x^2}}, \quad \text{s így}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2/x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\pi/n}, \text{ ahonnan}$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\pi/n-1}},$$

s ez nyilván azonos az előbb kapott eredménnyel; csak $n = 3$, 4, 5-re van értelme.

Ha $n \geqq 6$, akkor már azért sem lehetnek 120°-os lapszögek, mert akkor $DAE\sphericalangle \geqq 60°$, s így a DAE és FAE lapok szöge, $DFE\sphericalangle \geqq 60°$, mivel a lapszög az ilyen szögek közötti maximális szöggel egyenlő.

Schaub Zsuzsanna (Győr, Kazinczy lg. IV. o. t.) és
Nagy Dénes Lajos (Bp., Rákóczi g. IV. o. t.) dolgozata alapján.

Megjegyzés: A valóságban már $n = 4$ esetében is másként helyezkedik el a hártya, görbült élekkel: (3. ábra). Ugyanis 3-nál több hártya összefutása egy élben labilis.

Nagy Dénes Lajos (Bp., Rákóczi g. IV. o. t.)