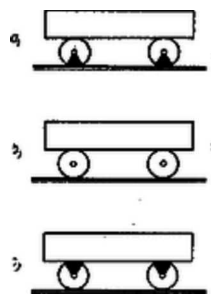


1. ábra

I. megoldás. Álló helyzetből indulva s út megtétele után Ps munka – a súrlódás elhanyagolásával – a rendszer mozgási energiájává alakul. Abban az esetben szükséges a kisebb erő, melynél s út megtétele után a rendszer mozgási energiája kisebb. Az s út megtétele után az M tömegű test sebessége adott $v = \sqrt{2as}$, mozgási energiája tehát mindhárom esetben egyforma. Ezért csak a hengerek mozgási energiáját számítjuk. Ez abban az esetben, ha a henger u sebességgel halad, és ω szögsebességű forgása is van:

$$E = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}(r\omega)^2.$$

A három eset közül u és ω megállapítása csak (b) esetben bonyolultabb. Ekkor vegyük figyelembe, hogy ha a test s utat tesz meg, akkor a henger fele annyi utat tesz meg, sebessége fele M sebességének.

A két henger mozgási energiáját számítva:

$$\begin{array}{llll}
\text{(a)}\quad u = 0, & \omega = v/r, & \text{helyettesítve:} & E_a = \dfrac{1}{2}mv^2 \\[2ex]
\text{(b)}\quad u = v/2, & \omega = v/2r, & & E_b = \dfrac{3}{8}mv^2 \\[2ex]
\text{(c)}\quad u = v, & \omega = v/r, & & E_c = \dfrac{3}{2}mv^2.
\end{array}$$

Az energiákból látható, hogy a rendszer gyorsításához a (b) esetben szükséges a legkisebb erő.

Raisz Miklós (Miskolc, Földes F. g. III. o. t.)

Megjegyzés: Ha nem álló helyzetéből, hanem v_0 kezdősebességű helyzetéből indul a rendszer, akkor v sebesség eléréséhez az energianövekedés pl. az (a) esetben:

$$E_a = \frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,mv_0^2 = \frac{1}{2}\,m(v^2 - v_0^2).$$

Hasonló átalakítás végezhető a (b) és (c) esetben is. Látható, hogy az energiák aránya ugyanaz, mint előbb.

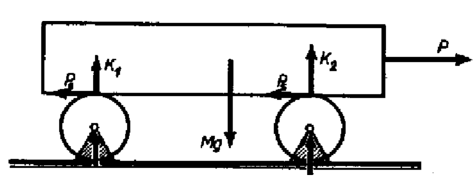
Strobl Ilona (Bp., Móricz Zs. g. III. o. t.)

II. megoldás. Az idézett cikk módszerét alkalmazva a mozgást helyettesítjük egyetlen tömeg v sebességű mozgásával. Az m_{red} tömeg az energiák alapján számítható. Pl. az (a) esetben:

$$m_{\text{red}}\frac{v^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2}\,mv^2.$$

Egyszerűsítés után: $m_{\text{red}} = M + m$. Hasonló módon a (b) esetben: $m_{\text{red}} = M + (3/4)\cdot m$, a (c) esetben pedig: $m_{\text{red}} = M + 3m$. Ha a rendszer a gyorsulással mozog, a gyorsításhoz szükséges erő: $P = a\cdot m_{\text{red}}$. Legkisebb a (b) esetben.

Márialigeti József (Bp., Piarista g. III. o. t.)



2. ábra

III. megoldás. A ható erők elemzése (a) esetben: Az m tömegű hasáb a gyorsulással halad, ezért a rá ható erők eredője $m\cdot a$ kell, hogy legyen. A hasábra ható erők: P, Mg és a hengerek érintkezésénél ébredő erők. Ezek felbonthatók az Mg súlyerővel szemben ébredő K_1 és K_2 erőre, továbbá a P_s súrlódó erőre.

A hasáb a hengereken megcsúszás nélkül gördül. A hengerek szöggyorsulása ezért $\beta = a/r$. P_s erő nagyságát abból az összefüggésből számíthatjuk, hogy egy hengerre ható erők közül a forgástengely körül forgatónyomatékot csak $-P_s$ erő gyakorol. (A hasáb által a hengerre ható erő.) Az r sugáron kifejtett forgatónyomaték: $P_s r = I \cdot \beta = \dfrac{mr^2}{2} \cdot \beta$, amiből β helyettesítésével és r-rel egyszerűsítve: $P_s = \dfrac{m \cdot a}{2}$.

P_s erő nem lehet nagyobb, mint K_1 és K_2 erők hatása esetén a nyugvó súrlódási tényezővel számított súrlódási erő. Ugyanis a henger és a hasáb megcsúszás nélküli gördülésének ez a feltétele. (Ezt hallgatólagosan az előző megoldásoknál is kihasználtuk. Itt alkalom nyílik a súrlódás szerepének tisztázására. Látható, hogy a megoldásnál szükség van a súrlódó erőkre. Ezek a súrlódó erők azonban nem okoznak energiaveszteséget! Energiaveszteség csak a hengerek tengelyénél keletkezik a csapágyban, ahol a felületek egymáson dörzsölődnek. Ezt a súrlódási energiaveszteséget elhanyagoljuk. A henger és a hasáb érintkezésénél ideális gördülést feltételezve, a felületek egymáshoz képest nyugalomban maradnak, ezért dörzsölésből származó melegfejlődés nincs. Vagyis jogosan mondhatjuk, hogy a súrlódó erőket nem hanyagoljuk el, de a súrlódásból származó energiaveszteségeket elhanyagoljuk.)

Visszatérve a henger gyorsításához:

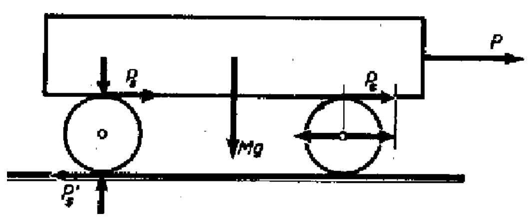
$$M \cdot a = P - 2P_s, \quad \text{amiből} \quad P = Ma + ma = (M+m)a.$$

A ható erők elemzése a (b) esetben: A hasábra ható erők elemzése egyezik az előzővel, csak P_s értéke más. Ezt a hengerre ható erők vizsgálatával számítjuk ki. A henger mindkét érintkezésénél csúszás nélkül gördül. Gyorsulása $a/2$, szöggyorsulása $\beta = a/2r$. A hengerre ható súrlódó erők P_s és P_s'. Ha a P_s erőt a henger középvonalába helyezzük, hatása a súlypontban ható P_s nagyságú erővel és egy $P_s r$ nagyságú forgatónyomatékkal helyettesíthető. Ugyanígy helyettesítjük a P_s' erőt is. Figyelembe véve a ható erők és nyomatékok irányát, első egyenletünket a súlypontra, másodikat a súlyponton áthaladó tengelyre felírhatjuk:

$$m \cdot a/2 = P_s - P_s' \qquad I \cdot \beta = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{a}{2r} = P_s \cdot r + P_s' \cdot r.$$

P_s és P_s' a kétismeretlenes egyenletrendszert megoldva:

$$P_s = \frac{3}{8}\, ma, \quad P_s' = -\frac{1}{8}\, ma.$$



3. ábra

Az eredményben P_s' negatív értéke arra az érdekes tényre mutat, hogy a talajon ébredő P_s' erő a rajzon felvett erővel ellentétes irányú. P_s értékét a hasáb egyenletébe helyettesítve:

$$P = Ma + 2P_s = \left(M + \frac{3}{4}\, m\right) a.$$

(c) esetben az erők elemzése hasonló. Az erőkre nyert kifejezésekből látszik, hogy a (b) esetben szükséges a legkisebb erő.

Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

Általánosítás: Henger alakú görgőre a kerületre redukált tömeg $m_{\mathrm{red}} = m/2$. Ha a görgő nem henger, akkor m_{red} értéke más lehet. Olyan görgők esetén, melyekre $m_{\mathrm{red}} < m/3$, az (a) eset a legkedvezőbb.

Treer Ferenc (Bp., Szerb–horvát tanítási nyelvű ált. isk. VIII. o. t.)