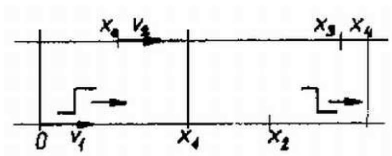
A pályához egy számegyenest illesztünk olyan módon, hogy a sípoló vonat a jeladás első pillanatában (innen számítjuk az időt) a skála nullpontjában legyen, és a pozitív féltengely felé haladjon v_1 sebességgel. Két alapvető esetet különböztetünk meg.

Az első esetben $t = 0$-ban az ismeretlen sebességű vonat a pozitív féltengely x_0 pontjában van. Jelöljük sebességét v_2-vel! Az alábbi egyenletek alakja nem függ attól, milyen irányba mozog a megfigyelő vonat. Ezért elegendő csak az egyik esetet vizsgálni és v_2-t előjeles mennyiségként kezelni.

Feltesszük, hogy a második vonat a hangnál lassabban halad. Következésképpen őt a hang utolérheti, másrészt a vezetője nem hallhatja a jelet megszűnni, mielőtt a sípolást az első vonat befejezné. A jel kezdete az x_1 pontban éri utol a megfigyelőt (1. ábra):

(1) $$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1 - x_0}{v_2}.$$

A sípolást az első vonat az $x_2 = v_1 t_1$ helyen fejezi be, a megfigyelő ekkor az $x_3 = x_0 + v_2 t_1$ pontban van.



1. ábra

Tételezzük fel, hogy $x_3 \geqq x_2$, azaz a két vonat a füttyjel ideje alatt nem haladt el egymás mellett. A jel vége az x_4 helyen éri utol a második vonatot:

(2) $$\frac{x_4 - x_2}{c} = \frac{x_4 - x_3}{v_2}.$$

(1) és (2) összevetésével, x_2-t és x_3-at beírva, a megfigyelő által észlelt jelhosszúságot megadhatjuk:

$$t_2 = \frac{x_4 - x_1}{v_2} = \frac{c - v_1}{c - v_2} t_1,$$

ahonnan

(3) $$v_2 = c - (t_1/t_2)(c - v_1) = -27{,}69 \text{ m/s} = -99{,}69 \text{ km/h},$$

a vonatok tehát egymással szemben haladnak.

Abban az esetben, ha $x_3 < x_2$, a vonatok a füttyjel alatt elhaladnak egymás mellett. Ekkor (2) helyett

(3) $$\frac{x_2 - x_4}{c} = \frac{x_4 - x_3}{v_2}.$$

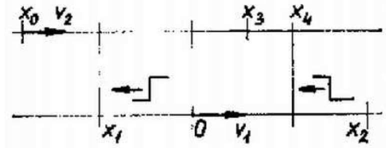
érvényes. Innen

$$t_2 = t_1 \frac{c + v_1}{c + v_2} - \frac{2cx_0}{c^2 - v_2^2},$$

azaz v_2-re egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$v_2^2 t_2 - v_2 t_1 (c + v_1) + c(c + v_1) t_1 - c^2 t_2 - 2\, c x_0 = 0,$$

így v_2 kifejezéséhez a vonatok kezdeti távolságára is szükségünk lenne, azért az eredményt numerikusan nem tudjuk megadni.



2. ábra

A második esetben $x_0 < 0$ (2. ábra). A jel kezdetével a vonat az $x_1 (< 0)$ pontban találkozik:

(4) $$-\frac{x_1}{c} = \frac{x_1 - x_0}{v_2}.$$

A füttyjel befejeztekor a vonatok az $x_2 = v_1 t_1$ és az $x_3 = x_0 + v_2 t_1$ pontokban vannak.

Tegyük fel, hogy $x_3 < x_2$, ekkor a jel vége az x_4 pontban találkozik a megfigyelővel:

(5)
$$\frac{x_4 - x_3}{v_2} = \frac{x_2 - x_4}{c}.$$

A fentiek alapján a megfigyelő

$$t_2 = \frac{x_4 - x_1}{v_2} = t_1 \frac{c + v_1}{c + v_2}$$

ideig hallotta a sípolást. Innen

(6)
$$v_2 = (t_1/t_2)(c + v_1) - c = 73{,}85\ \mathrm{m/s} = 265{,}85\ \mathrm{km/h}.$$

Amennyiben a vonatok elhaladtak egymás mellett, azaz $x_2 < x_3$, akkor (5) helyett

(5*)
$$\frac{x_4 - x_3}{v_2} = \frac{x_4 - x_2}{c}$$

áll fenn. Ezt felhasználva a fentiekhez hasonlóan számolva v_2-re a

$$v_2^2 t_2 + v_2(c - v_1)t_1 - c^2 t_2 + c(c - v_1)t_1 + 2\ c x_0 = 0$$

egyenletet kapjuk. A v_2-t megadó képletből x_0 ezúttal nem esik ki, numerikus megoldást ezért nem adhatunk.

Ábrahám Csongor (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., I. o. t.) *Megjegyzés.* Néhány megoldó a leadott, ill. megfigyelt hangot $\nu_1 = (1/15)$ 1/s és $\nu_2 = (1/13)$ 1/s frekvenciájú jelek részének tekintette, s a megfigyelő sebességére a Doppler-effektus képletét írta fel. Ha a megfigyelő kezdeti helyzete felé halad a füttyjelet leadó mozdony, akkor a

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 - (v_2/c)}{1 - (v_1/c)},$$

ha az első pillanatban a megfigyelő az első vonat mögött volt, akkor a

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{1 + (v_2/c)}{1 + (v_1/c)}$$

képletek érvényesek. Ezek az egyenletek a (3), ill. a (6) eredményre vezetnek.

A Doppler-effektust leíró kifejezés feltételezi, hogy egy periódus alatt a jeladó és a megfigyelő nem találkozik. Ezért ez a megközelítés nem tud számot adni arról a fentebb tárgyalt esetről, amikor a füttyjel alatt a vonatok elhaladnak egymás mellett.