A sorozat képzési szabálya alapján világos, hogy ha nemcsak a_0, hanem még a_1 értékét is megadjuk, akkor már a sorozat tagjai egyértelműen meg vannak határozva. Nem adhatjuk meg azonban tetszés szerint a_1 értékét, hiszen a_1 megválasztásával biztosítanunk kell, hogy a sorozat tagjai pozitívak legyenek. Azt kell megmutatnunk tehát, hogy ez a követelmény a_1-et egyértelműen meghatározza.

Jelöljük a_1-et x-szel, és nézzük meg n néhány értékére, hogy milyen feltételt jelent x-re az $a_n > 0$ alapkövetelmény:

$$\begin{array}{lll}
a_1 = x, & \text{tehát} & x > 0; \\
a_2 = -x + 1, & \text{tehát} & x < 1; \\
a_3 = 2x - 1, & \text{tehát} & x > \dfrac{1}{2}; \\
a_4 = -3x + 2, & \text{tehát} & x < \dfrac{2}{3}; \\
a_5 = 5x - 3, & \text{tehát} & x > \dfrac{3}{5}; \\
a_6 = -8x + 5, & \text{tehát} & x < \dfrac{5}{8}.
\end{array}$$

Közben megfigyelhettük, hogy x együtthatóinak az előjele változik, és ugyanezek az együtthatók lépnek fel a következő tag konstansaként, vagyis

$$a_n = (-1)^{n-1}(\lambda_n x - \lambda_{n-1}), \tag{1}$$

ahol $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_6 = 5$.

Ezekre a számokra teljesül a

$$\lambda_{n+1} = \lambda_{n-1} + \lambda_n \tag{2}$$

összefüggés, állítsuk elő ennek alapján az egész λ_n sorozatot. Megmutatjuk, hogy ha a λ_n sorozatot a $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1$ kezdőértékek és a (2) összefüggés alapján határozzuk meg, akkor az a_n sorozat minden tagjára teljesül (1). Már láttuk, hogy (1) igaz $n = 1, 2$ mellett. Tegyük fel, hogy valamilyen $N \geqq 2$ szám mellett már beláttuk, hogy (l) teljesül minden $n \leqq N$ indexre. Akkor ebből és a képzési szabályból következik, hogy

$$a_{N+1} = a_{N-1} - a_N = (-1)^{N-2}(\lambda_{N-1}x - \lambda_{N-2}) - (-1)^{N-1}(\lambda_N x - \lambda_{N-1}) =$$
$$(-1)^N(\lambda_{N-1} + \lambda_N)x - (\lambda_{N-2} + \lambda_{N-1})\big],$$

ami (2) alapján valóban (1) alakú.

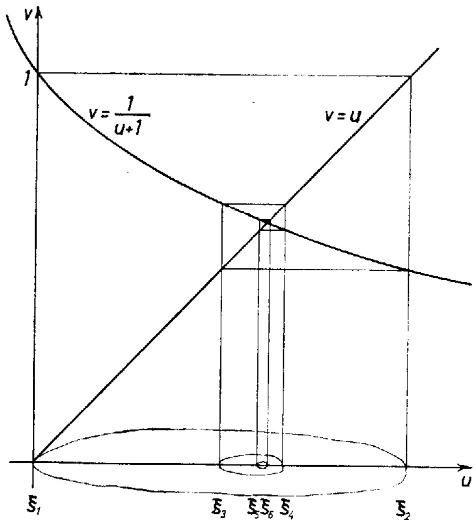
Mivel $\lambda_1 > 0$, (2)-ből következik, hogy $n > 0$ mellett $\lambda_n > 0$. Így az $a_{2k-1} > 0$ feltételből az következik, hogy $x > \lambda_{2k-2}/\lambda_{2k-1}$, az $a_{2k} > 0$ feltételből pedig az, hogy $x < \lambda_{2k-1}/\lambda_{2k}$. Jelöljük a λ_{n-1}/λ_n hányadost ξ_n-nel, akkor

$$\xi_{2k-1} < x < \xi_{2k}; \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Azt kell megmutatnunk, hogy (3) egyértelműen meghatározza x értékét. (2) szerint

$$\xi_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1} + \lambda_n} = \frac{1}{\xi_n + 1}.$$

A továbbiakban elég ennyit tudnunk a ξ_n sorozatról, és azt, hogy $\xi_1 = 0$, hiszen ezzel a ξ_n sorozat már egyértelműen meg van határozva.



A $k = 1, 2, 3$ számokra (3) rendre a $(0,\ 1)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{5}, \frac{5}{8}\right)$ nyílt intervallumokat engedi meg x szóbajöhető értékeire. Ezek az intervallumok tartalmazzák egymást, szokásos kifejezéssel élve: egymásba vannak skatulyázva. Akárhányat sorolunk is fel közülük, a legutolsó mindig a legrövidebb, benne van mindegyik korábbiban, elég tehát x-ről azt megkövetelni, hogy abban legyen benne. (Ezeket az intervallumokat és a ξ_n sorozat képzési szabályát szemlélteti az ábra.)

Jelöljük az $u = \dfrac{1}{u+1}$ egyenlet pozitív gyökét ξ-vel: $\xi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Mivel

$$0 = \xi_1 < \xi_3 < \xi,$$

és az $f(u) = \dfrac{1}{u+1}$ függvény $u \geqq 0$ mellett monoton fogy,

$$f(\xi_1) > f(\xi_3) > f(\xi),$$

azaz

$$\xi < \xi_4 < \xi_2.$$

Hasonlóan a

$$0 \leq \xi_{2k-1} < \xi_{2k+1} < \xi$$

egyenlőtlenségből a

$$\xi < \xi_{2k+2} < \xi_{2k}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, ebből pedig a

$$0 \leqq \xi_{2k+1} < \xi_{2k+3} < \xi$$

egyenlőtlenséget. Tehát a ξ_n sorozat páratlan indexű tagjaiból álló részsorozata monoton nő, és a tagok kisebbek ξ-nél, a páros indexű tagok részsorozata pedig monoton fogy, és a tagok nagyobbak ξ-nél. Emiatt (3) teljesül az $x = \xi$ számra, azt kell még megmutatnunk, hogy másra nem teljesülhet. Tudjuk, hogy

$$\delta_k = \xi_{2k} - \xi_{2k-1}$$

sorozat monoton fogy és tagjai pozitívak. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat 0-hoz tart. Ebből már következik állításunk, hiszen ha volna olyan $x \neq \xi$ szám, amelyre teljesülne (3), akkor a δ_k sorozat minden tagja nagyobb volna a pozitív $|\xi - x|$-nél, ami $\delta_k \to 0$ miatt nem lehet. Mivel

$$\delta_k = \xi_{2k} - \xi_{2k-1} = \frac{\lambda_{2k-1}}{\lambda_{2k}} - \frac{\lambda_{2k-2}}{\lambda_{2k-1}} = \frac{\lambda_{2k-1}^2 - \lambda_{2k}\lambda_{2k-2}}{\lambda_{2k}\lambda_{2k-1}},$$

készen is vagyunk, ha belátjuk, hogy itt a számláló értéke mindig 1, hiszen a nevező a nyilvánvaló $\lambda_n \geqq n$ egyenlőtlenség miatt tart végtelenbe. A $\Delta_n = \lambda_n^2 - \lambda_{n-1}\lambda_{n+1}$ sorozat tagjaira

$$\Delta_{n+1} = \lambda_{n+1}^2 - \lambda_n\lambda_{n+2} = \lambda_{n+1}^2 - \lambda_n(\lambda_n + \lambda_{n+1}) = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) - \lambda_n^2 =$$
$$\lambda_{n+1}\lambda_{n-1} - \lambda_n^2 = -\Delta_n$$

teljesül, tehát $\Delta_{n+2} = \Delta_n$, így $\Delta_1 = 1$ miatt a sorozat minden páratlan indexű tagja 1-gyel egyenlő. Mivel δ_k fenti alakjában éppen ezek állnak a számlálóban, a bizonyítást ezzel befejeztük.

Megjegyzés. Általában ha egy ξ_n sorozatról tudjuk, hogy a páratlan indexű tagjainak részsorozata monoton nő, a páros indexűeké pedig fogy, és a $\delta_k = \xi_{2k} - \xi_{2k-1}$ különbség 0-hoz tart, akkor a sorozat konvergens. A megoldók többsége erre az állításra hivatkozva bizonyította, hogy a (3) feltételnek egy és csakis egy megoldása van. Ebből a „csak egy” rész a $\delta_k \to 0$ feltétel következménye, mint azt megoldásunkban is láttuk, a „legalább egy” rész pedig szervesen kapcsolódik a valós szám fogalmához. Tekintve, hogy az analízis alapfogalmainak jelenleg használt középiskolai bevezetése nagymértékben támaszkodik a szemléletre, ez a tétel nem szerepel a tananyagban, ezért bizonyítottuk a (3) feltételnek eleget tevő x szám létezését e tétel felhasználása nélkül (ami különben nem került különösebb fáradságba, hiszen ez az x az esetünkben explicit megadható volt).