Ellenpéldával megmutatjuk, hogy a feladat állítása nem igaz. Legyen $a \neq 0$ tetszőleges racionális, b pedig tetszőleges irracionális szám, például $a=1$, $b=\sqrt{2}$, és legyen f tetszőleges nem állandó, a periódusú függvény, például $f(x)=\sin\dfrac{2\pi x}{a}$. Legyen végül a $g(x)$ függvény értéke 1 mindazokon az x helyeken, amelyekhez találhatók olyan m, n egészek, melyekre $x=ma+nb$, és legyen $g(x)$ értéke 0 a többi x-re. Mivel az $ma+nb$ alakú számok halmaza megszámlálható (éppen az m, n számok segítségével), és a valós számok halmaza nem megszámlálható, van olyan x, amelyik nem állítható elő $ma+nb$ alakban, itt tehát $g(x)=0$, és mivel például $g(a)=1$, a $g(x)$ függvény nem állandó.

Megmutatjuk, hogy az így definiált g függvény a és b periódussal is periodikus. Ha ugyanis x előállítható $ma+nb$ alakban: $x=ma+nb$, akkor $x+a=(m+1)a+nb$ és $x+b=ma+(n+1)b$, tehát $g(x)=g(x+a)=g(x+b)=1$. Ha pedig x nem állítható elő $ma+nb$ alakban, akkor sem $x+a$, sem $x+b$ nem állítható elő ilyen alakban, és így $g(x)=g(x+a)=g(x+b)=0$.

Tehát sem f, sem g nem állandó, f periodikus a periódussal, g periodikus b periódussal, és mivel g az a periódussal is periodikus, $f+g$ is periodikus, mégpedig a periódussal.

Fehér József (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A téves kitűzés oka, hogy tévedésből elmaradt az a feltevés, hogy f is és g is folytonosak. Megmutatjuk, hogy ha ezt feltesszük, akkor már igaz, a feladat állítása. Az áttekinthetőség kedvéért lépésekre bontjuk a bizonyítást, minden lépés előtt külön megfogalmazva az éppen bizonyítandó állítást.

(1) Ha $f(x)$ folytonos valós függvény, $\alpha_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$ $\alpha_n\to 0$, és az α_n számok mind periódusai f-nek, akkor f állandó.

Valóban, legyen $x<y$, $p_n=\left[\dfrac{y-x}{\alpha_n}\right]$. Ekkor

$$\left|(y-x)-p_n\alpha_n\right|=\alpha_n\left(\frac{y-x}{\alpha_n}-p_n\right)<\alpha_n,$$

azaz

$$x+p_n\alpha_n\to y,\ \text{ha}\ n\to\infty,$$

f folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} f(x+p_n\alpha_n)=f(y),$$

de α_n-nel együtt $p_n\alpha_n$ is periódus, így minden n-re

$$f(x+p_n\alpha_n)=f(x),$$

és így $f(x)=f(y)$. $f(x)$ tehát bármely két helyen ugyanazt az értéket veszi fel, azaz állandó.

(2) Legyen $f(x)$ folytonos, nem állandó függvény és tegyük fel, hogy f periodikus. Ekkor a pozitív periódusok között van legkisebb, és ezt c-vel jelölve minden periódus $n\cdot c$ alakú, ahol $n=(0),\pm1,\pm2,\ldots$

Tegyük fel, hogy f pozitív periódusai között nincs legkisebb. Ekkor felvehető pozitív periódusok egy szigorúan csökkenő $\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_n>\ldots$ sorozata. Az $\alpha_n=\beta_n-\beta_{n+1}$ is pozitív periódusok egy sorozata lesz, és $\alpha_n\to 0$. Így az előző (1) állításra hivatkozva $f(x)$ állandó, ami ellentmondás; van tehát, egy legkisebb c pozitív periódus. Tegyük fel, hogy volna f-nek olyan c' periódusa, amely nem nc alakú. Így van olyan n egész szám, hogy $nc<c'<(n+1)c$. Ám $(n+1)c-c'=d$ pozitív periódusa f-nek és $(n+1)c-c'<(n+1)c-nc=c$ miatt $d<c$, ami lehetetlen c választása folytán.

(3) Ha $f(x)$ folytonos és periodikus a és b szerint, ahol a racionális, b irracionális, akkor $f(x)$ állandó.

Ha f nem volna állandó, akkor (2) szerint minden periódusa, így a is, b is nc alakú lenne, és ebből $\dfrac{a}{b}$ racionális, ami feltevésünk szerint nem lehet.

(4) ha $f(x)$ folytonos és periodikus, akkor korlátos.

Valóban, ha c jelöli f egy periódusát, akkor f minden értékét felveszi már a $[0,\,c]$ intervallumon, ahol Weierstrass tétele szerint korlátos. (Lásd IV. osztályos tankönyv, 89. oldal.)

(5) Legyen végül f folytonos és periodikus az a racionális szám szerint, g folytonos és periodikus a b irracionális szám szerint, és tegyük fel, hogy $h(x)=f(x)+g(x)$ periodikus, periódusa $c\neq 0$. Ekkor $h(x)=h(x+c)$, azaz $f(x)+g(x)=f(x+c)+g(x+c)$, vagyis minden x-re $f(x+c)-f(x)=g(x)-g(x+c)$ fennáll. Ám a bal oldal a, jobb pedig b szerint periodikus, így mindkét oldal a és b szerint is periodikus. (3)-ra hivatkozva $f(x+c)-f(x)$ és $g(x+c)-g(x)$ állandó. Mondjuk $f(x+c)-f(x)=K$. Itt x helyébe rendre $x+c-t$, $x+2c-t\ldots$, $x+(n-1)c-t$-t írva, összeadással $f(x+nc)-f(x)=nK$, és ez tetszőleges $n=1,2,\ldots$-re fennáll. Mivel (4) szerint f korlátos, ez csak úgy állhat fenn, ha $K=0$, mert különben a jobb oldal n növekedésével nem korlátos. Ezzel beláttuk, hogy $f(x)$ periodikus c szerint, és pontosan ugyanígy következik, hogy $g(x)$ is periodikus c szerint. Ha most már c racionális, akkor (3)-ra hivatkozva g állandó, ha pedig c irracionális, akkor megint (3) alapján f állandó, és ezzel állításunkat beláttuk.