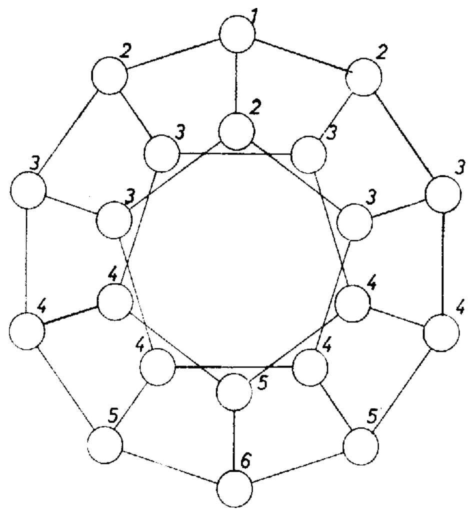
Ha az ábra 20 körének mindegyikébe 0-t írunk, akkor teljesül a feltétel. Azt akarjuk megmutatni, hogy másképp nem is lehet kitölteni az ábrát: ha a beírt számokra a feltétel teljesül, úgy mindenhová 0-t kellett írnunk.



Vegyük észre, hogy az ábra „forgásszimmetrikus”, középpontja körül $360°/10 = 36°$-kal elfordítva önmagába megy át. Így, ha sikerül megmutatnunk, hogy a külső vonal egy meghatározott (pl. a kis 1-essel jelölt) körébe 0-t kell írnunk, akkor ebből már következik, hogy a külső vonal minden körébe 0-t kell írnunk. És ha még azt is megmutatjuk, hogy a belső körök egyikébe (pl. a 2-es jelűbe) is 0-t kell írnunk, ezzel azt is igazoljuk, hogy az ábra minden köre csak 0-t tartalmazhat. Hiszen ha egy megoldásban volna olyan kör, amelyben nem 0 van, azt elforgatással átvihetnénk vagy az 1-es vagy a 2-es jelű körbe, a beírt számokra pedig továbbra is áll a feltétel.

Jelöljük az i-vel jelölt körökben álló számok összegét a_i-vel ($i = 1, 2, \dots 6$), és írjuk fel egymás után minden i-re az összes i-vel jelölt körökre a feltételek *összegét.* Így a következő 6 egyenletet kapjuk:

$$a_i + a_2 = 0; \qquad 3a_1 + a_2 + a_3 = 0; \qquad 2a_2 + 2a_3 + a_4 = 0;$$
$$a_3 + 2a_4 + 2a_5 = 0; \qquad a_4 + a_5 + 3a_6 = 0; \qquad a_5 + a_6 = 0.$$

(Pl. a 3 db 2-es jelű kör feltételeinek összegében $3\cdot 4 = 12$ tag szerepel, az 1-es kör száma 3-szor, a 3 db 2-es 1-szer–1-szer és ugyanígy a 6 db 3-as is, mert mindegyik 2-es az 1-essel és $2-2$ db 3-assal szomszédos, mindegyikük másik 2 db 3-assal.) Az elsőből a_2-t, a másodikból a_3-t, …, az ötödikből a_6-t fejezzük ki a_1 segítségével: $a_2 = -a_1$; $a_3 = -2a_1$; $a_4 = 6a_1$; $a_5 = -5a_1$; $a_6 = -a_1/3$. Ezt a hatodikba helyettesítve kapjuk, hogy $a_1 = 0$, vagyis az 1-es jelű körbe valóban 0-t kell írnunk.

Az előrebocsátottak szerint ekkor a külső vonal mindegyik köre 0-t tartalmaz, tehát az 1-es körre a feltétel csak úgy állhat – mivel a szóban forgó négy kör közül három a külső vonalon van –, ha a belső 2-es körben is 0 áll.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A megoldók többsége a 20 körbe írt számokat 20 ismeretlennek fogta fel, a feltételeket pedig 20 egyenletnek, majd megmutatta (több-kevesebb ügyeskedéssel), hogy az egyenletrendszer egyetlen megoldása az, amikor mindegyik ismeretlen 0. Volt, aki kiküszöböléssel, rengeteg számolás árán jutott el az eredményig. A hibás dolgozatok egy része hivatkozott az ún. Cramer-szabályra, amely az ilyen típusú egyenletrendszerek megoldására szolgál, de a feladat állításával ekvivalens állítást, hogy ti. a rendszer 20×20-as determinánsának értéke nem nulla, legfeljebb „megemlítették”, de egyikük sem bizonyította. A fenti megoldásból ez egyébként következik.

2. Az ábra tekinthető egy szabályos *dodekaéder* (12 szabályos ötszöglappal határolt konvex test) élváza merőleges vetületének egy lap síkjára. (A körök a csúcsokat jelentik, a körök akkor vannak összekötve, ha a megfelelő csúcsok között él fut.) Ebben a felfogásban a testet úgy forgathatjuk különböző tengelyei (lap-, él- és csúcstengelyek) körül, hogy a test önmagával fedésbe jusson és tetszőleges csúcsa tetszőleges másik csúcsa helyére jusson; eszerint az ábra külső és belső körei is egyenrangúak.