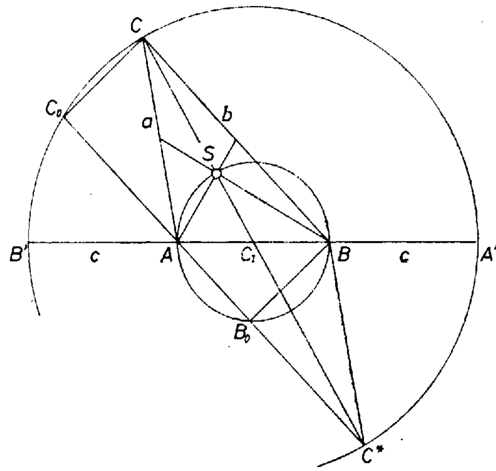
Legyenek az ABC háromszögnek az A és B csúcsából kiinduló súlyvonalai merőlegesek egymásra. Így közös pontjukból, az S súlypontból az AB oldalt derékszögben látjuk, S rajta van az AB átmérőjű Thalész-kör kerületén, tehát S-nek az $AB=c$ oldal C_1 felezőpontjától való távolsága egyenlő az oldal felével: $SC_1=AB/2$. És mivel S harmadolja a C_1C súlyvonalat, azért $C_1C=3AB/2$, vagyis C rajta van a C_1 körüli $s_c=3c/2$ sugarú körön. – Meggondolásunk megfordítható, a feltétel tehát nemcsak szükséges, hanem elégséges is.



A $CC_1=s_c$ súlyvonal bármely háromszögben egyszerűen kifejezhető a három oldallal, így az előbbi helyzetfeltételt átalakíthatjuk a háromszög oldalai közti méretes feltétellé. Legyen C tükörképe C_1-re C^*, ekkor a CAC^*B paralelogramma átlói és oldalai között fennáll:[1]

$$CC^{*2}+AB^2=AC^2+CB^2+BC^{*2}+C^*A^2,$$
$$4s_c^2+c^2=2a^2+2b^2.$$

Ez esetünkben a feltétel a talált $2s_c=3c$ alakja alapján így specializálódik:

$$5c^2=a^2+b^2, \tag{1}$$

és ez ugyancsak szükséges és elegendő az a, b, c oldalakkal meghatározott háromszög a és b oldalaihoz tartozó súlyvonalak merőlegességéhez.

Megjegyzés. Abból, hogy a vizsgált háromszögekben C rajta van a C_1 körüli $3c/2=3\cdot AC_1=3BC_1$ sugarú körön, következik, hogy a további két oldal nagyságra nézve c és $2c$ közé esik: $c<a$, $b<2c$, hiszen a körnek az AB egyenesen levő, A-hoz legközelebbi B' és A-tól legtávolabbi A' pontjára $B'A=AB=BA'=c$, $AA'=2c$, és ha C egybeesnék B'-vel, A'-vel, akkor már nem jönne létre valódi háromszög.

Mégsem kell a talált (1) feltétel mellé még azt is kikötnünk, hogy c a háromszög legrövidebb oldala legyen. Ha ugyanis pl. $a=\vartheta c$ lenne, ahol $0<\vartheta\le 1$ akkor (1)-ből

$$b^2=(5-\vartheta^2)c^2\ge 4c^2, \qquad b\ge 2c,$$

és ekkor a, b, c oldalakkal nem szerkeszthető háromszög, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, hiszen $b\ge a+c$.

[1] A felhasznált segédtételt úgy kapjuk, hogy Pitagorasz tételét alkalmazzuk a CC^*C_0, ABB_0, ACC_0, BC^*B_0 derékszögű háromszögekre, ahol B_0, C_0 a B, C csúcs vetülete az AC^* egyenesen.