$$\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8\ 5>4. \tag{1}$$

I. megoldás. Alkalmazva a $(\log_a b)\cdot(\log_b c)=\log_a c$ azonosságot, valamint a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget, azonnal láthatjuk, hogy

$$\log_5 6+\log_6 7\geq 2\cdot\sqrt{\log_5 6\cdot\log_6 7}=2\cdot\sqrt{\log_5 7},$$

illetve

$$\log_7 8+\log_8 5\geq 2\cdot\sqrt{\log_7 8\cdot\log_8 5}=2\cdot\sqrt{\log_7 5}.$$

Ismét alkalmazva a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$(\log_5 6+\log_6 7)+(\log_7 8+\log_8 5)\geq 2\cdot\sqrt{\log_5 7}+2\cdot\sqrt{\log_7 5}\geq$$
$$\geq 4\cdot\sqrt{\sqrt{\log_5 7}\cdot\sqrt{\log_7 5}}=4\cdot\sqrt[4]{\log_5 7\cdot\log_7 5}=4.$$

Ezzel éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kaptuk meg ha még igazoljuk, hogy az utolsó egyenlőtlenség helyett szigorú egyenlőtlenséget írhatunk. Valóban $a>b>1$ esetén $\log_b a>1>\log_a b$, azaz

$$2\sqrt{\log_5 7}>2>2\sqrt{\log_7 5},$$

és két pozitív szám számtani és mértani közepe csak akkor egyenlő, ha a két szám egyenlő; egyébként mindig a számtani közép a nagyobb.

II. megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $a>b>1$, $x>1$, úgy

$$\log_a x<\log_b x.$$

Ezt használjuk fel az (1) egyenlőtlenség igazolására.

(1) tagjait átalakítva az

$$\log_5 6=\log_5\left(5\cdot\frac{6}{5}\right)=1+\log_5\frac{6}{5}$$

egyenlőség mintájára, azt kapjuk, hogy elegendő igazolnunk a következőt:

$$\log_5\frac{6}{5}+\log_6\frac{7}{6}+\log_7\frac{8}{7}+\log_8\frac{5}{8}>0. \tag{2}$$

Az előrebocsátottak szerint, ha mindenütt 8-as alapra térünk át, (2) bal oldalánál határozottan kisebbet kapunk:

$$\log_5\frac{6}{5}+\log_6\frac{7}{6}+\log_7\frac{8}{7}+\log_8\frac{5}{8}>\log_8\frac{6}{5}+\log_8\frac{7}{6}+\log_8\frac{8}{7}+\log_8\frac{5}{8}=$$
$$=\log_8\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{5}{8}=0,$$

amit igazolni akartunk.

Megjegyzés. Több megoldó a bizonyítandó egyenlőtlenséget úgy igazolta, hogy kiszámította a bal oldal értékét és azt 4-nél valamivel nagyobbnak találta. Ilyen megoldást is teljes értékűnek fogadtunk el akkor, ha a dolgozat mind a függvénytáblázatbeli, mind a számításkor előforduló esetleges kerekítési hibákat figyelembe véve igazolta az egyenlőtlenséget.