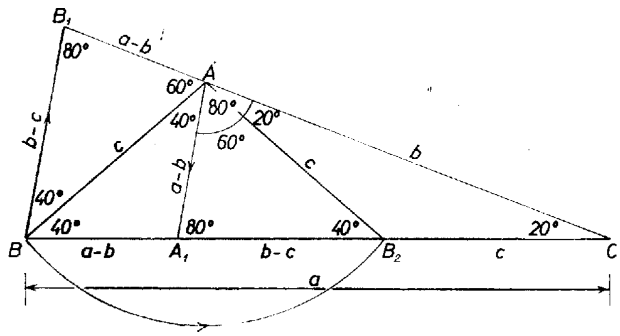
(1) $$bc^2=(a+b)(a-b)^2.$$

I. megoldás. A feltevések szerint $\beta=2\gamma$ és $\alpha=6\gamma$, tehát a szögek összegéből $\gamma=20^\circ$, majd $\beta=40^\circ$, $\alpha=120^\circ$.

Fordítsuk rá C körül A-t a CB félegyenesre A_1-be és B-t a CA-ra, B_1-be, továbbá A körül B-t a BC-re, a B_2 pontba (1. ábra).



1. ábra

Így CAA_1, CBB_1, ABB_2 egyenlő szárú háromszögek, az ezekből kiadódó szögértékek alapján egyszerű számítás szerint a B_2CA és A_1AB háromszög is egyenlő szárú: $BB_2A\sphericalangle=40^\circ$, a külső szög tétele alapján $B_2AC\sphericalangle=40^\circ-\gamma=20^\circ=\gamma$, illetve $CA_1A\sphericalangle=80^\circ$, $A_1AB\sphericalangle=80^\circ-\beta=40^\circ=\beta$.

Továbbá az ABB_1 és AB_2A_1 háromszögek szögei (a csúcsok felsorolásának rendjében) páronként egyenlők: 60°, 40°, 80°.

A szerkesztésünk és számításunk szerint egyenlő szakaszok: $BA_1=B_1A=AA_1=a-b$ és $AB=AB_2=B_2C=c$, így az ABB_1 és AB_2A_1 háromszögek egybevágóak, ezért $B_1B=A_1B_2=CA_1-CB_2=b-c$, továbbá $BB_2=a-c$.

Mármost a CAA_1, CB_1B, majd az ABB_2, A_1AB háromszögpárok hasonlósága alapján, megfelelő oldalpárjaik arányából

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a},\quad \text{illetve}\quad \frac{a-c}{c}=\frac{c}{a-b}.$$

Ezekből – egy kis előrelátó ügyeskedéssel – az (1) bal oldalának tényezőire a következőket írjuk fel:

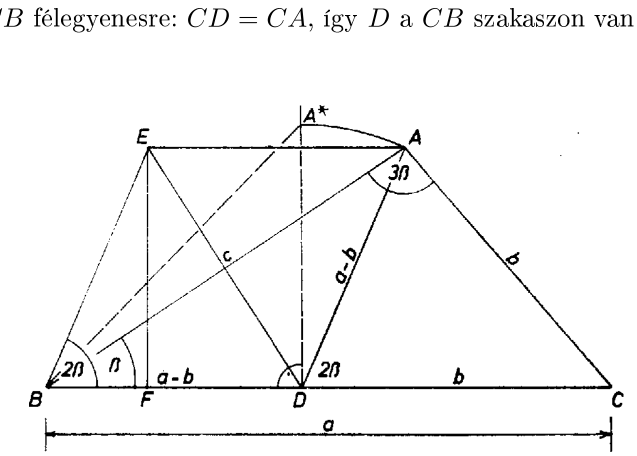
$$b=\frac{a^2-b^2}{a-c},\quad \text{illetve}\quad c^2=(a-c)(a-b);$$

innen ugyanis a jobb oldalak szorzata azonnal egyenlőnek adódik az (1) jobb oldalával. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Az ABC háromszög köré írt k körből az AB, BC, CA oldal által lemetszett ív a középpontból rendre $2\gamma=40^\circ$, $2\alpha=240^\circ=6\cdot40^\circ$, $2\beta=2\cdot40^\circ$ szögben látható. És mivel 40°-os középponti szög tartozik a k-ba beírt $1+6+2=9$ oldalú szabályos sokszög oldalaihoz is, azért A, B és C annak a szabályos 9-szögnek a csúcsai közül valók, amelynek oldalhossza c; ekkor egy csúcsát a tőle második, illetve harmadik csúccsal összekötő átló hossza b, ill. a.

II. megoldás. Ha a fentieknél kissé több számítást engedünk meg magunknak, és felhasználjuk a hegyesszög cosinusának definícióját, akkor (1) bizonyításához *elég* a feltevésnek az $\alpha=3\beta$ része. Az $\alpha+\beta<180^\circ$ kapcsolat miatt természetesen $\beta<45^\circ$. (Valóban, $\beta=30^\circ$ és $b=1$ mellett $a=2$, $c=\sqrt{3}$, és teljesül az állítás.)

Mérjük fel ismét CA-t a CB félegyenesre: $CD=CA$, így D a CB szakaszon van, hiszen $\alpha>\beta$ miatt $a>b$, azaz $CB>CA$ (2. ábra).



2. ábra

Mivel $\gamma = 180° - 4\beta$, azért $CAD\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 2\beta$, tehát $DAB\sphericalangle = \beta = DBA\sphericalangle$, ennélfogva $DA = DB = a - b$. Így a CAD és a DAB háromszögből.

$$\cos 2\beta = \frac{a-b}{2b}, \quad \text{illetve} \quad \cos\beta = \frac{c}{2(a-b)}. \tag{2}$$

Legyen még D-nek AB-re való tükörképe E, és E-nek BD-n levő vetülete F. Ekkor $EBD\sphericalangle = 2\beta$, és a $BEAD$ rombusz területének kétféle kifejezéséből

$$EF = \frac{AB \cdot DE}{2BD} = \frac{AB}{BD}\sqrt{BD^2 - \frac{AB^2}{4}},$$

$$BF^2 = BE^2 - EF^2 = BE^2 - AB^2 + \frac{AB^4}{4BD^2} =$$

$$= \frac{1}{4(a-b)^2}\{c^4 - 4c^2(a-b)^2 + 4(a-b)^4\},$$

$$\cos 2\beta = \frac{BF}{BE} = \frac{c^2 - 2(a-b)^2}{2(a-b)^2} = 2\left(\frac{c}{2(a-b)}\right)^2 - 1. \tag{3}$$

A négyzetgyök előjelét helyesen vettük, mert $\beta < 45°$ miatt $BA > BA^*$, ahol A^* az A ráforgatottja a D-ben emelt merőlegesre, tehát $c > \sqrt{2}(a-b)$.

A bal oldalon (2) első kifejezését helyettesítve, kellő alakítás után (1)-et kapjuk.

Jónás Béla (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ennek a bizonyításnak az ötlete abból adódhat, ha valaki megpróbálja megfordítani a tételt. Az (1) összefüggés feltevéséből azonban már eleve nem várható, hogy két kapcsolatot kapjunk a szögek között. A megfordítás így hangzik: ha egy háromszögben fennáll (1), akkor $\alpha = 3\beta$. Ez több geometriai számítással igazolható. A dolgozatok jelentős részében az eredeti feltevés melletti bizonyításnak is geometriai azonosságok az eszközei.

2. (3) jobb oldalába (2) második kifejezését írva, a goniometriából ismert $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ azonosságot kapjuk, de csak a $0° < \beta < 45°$ korlátozással.