Ha megvizsgálunk néhány természetes számot, az a sejtésünk támad, hogy a hányadosok között $9/81 = 1/9$ a legkisebb. A továbbiakban ezt a sejtésünket igazoljuk.

Az egyjegyű számokra a kérdéses hányados $n/n^2 = 1/n$, ezek között valóban a legkisebb az $1/9$.

Ha most az n szám legalább kétjegyű és tízes számrendszerbeli alakja $a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ $(a_k \neq 0,\ k \geq 1)$, akkor azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{n}{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i^2} = \frac{10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \ldots + 10 a_1 + a_0}{a_k^2 + a_{k-1}^2 + \ldots + a_1^2 + a_0^2} > \frac{1}{9},$$

azonos átalakítások után

$$a_k(9 \cdot 10^k - a_k) + a_{k-1}(9 \cdot 10^{k-1} - a_{k-1}) + \ldots + a_0(9 - a_0) > 0.$$

Mivel $a_0, \ldots, a_k$ mind 0 és 9 közé eső számjegyek, ezért a bal oldal mindegyik tagja nem-negatív, első tagja pedig $a_k \neq 0$ és $k \geq 1$ miatt pozitív; tehát a kérdéses egyenlőtlenség is fennáll.

Így valóban $1/9$ a legkisebb a hányadosok között.

Bognár Gabriella (Miskolc, Földes F. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladat szövegében némelyek számára furcsának tűnhet ez a rész: „van-e az így kapott hányadosok között legkisebb”, hiszen megszoktuk, hogy megadott számok között mindig van legkisebb. Ez azonban koránt sincs mindig így. Például nincs legkisebb az egész számok, a racionális számok vagy akár a valós számok között. De nincs legkisebb *pozitív* racionális szám sem: minden g pozitív racionális számnál $g/2$ kisebb és szintén pozitív racionális szám. Ugyanúgy, ha vesszük, gondolatban minden természetes szám reciprokát, akkor az így adódó hányadosok között sem lesz legkisebb. Nem volt tehát felesleges óvatosság a kérdésbe ezt a részt beszúrni.

De mikor tudjuk biztosan, hogy bizonyos számok között van-e legkisebb, mi az, ami megmondja, hogy számok egy csoportjában, *halmazában* mikor van feltétlenül legkisebb elem? Nos, ezt a halmaz elemeinek száma, a halmaz *számossága* mutatja meg. Ha a halmazban *véges* sok szám van, azaz a számokat le tudjuk számlálni, meg tudjuk mondani, hány *darab* szám van a halmazban (tíz, száz stb.), akkor a halmazban szereplő számok között feltétlenül van legkisebb (és legnagyobb is). Ha azonban a halmazban *végtelen* sok szám van, akkor lehetséges ugyan, hogy van a számok között legkisebb (mint példánkban), de az nem *biztos.*

Fel szeretnénk hívni a figyelmet arra, hogy a matematikában a *végtelen* szót mindig *nem véges* értelemben használjuk. A fenti példában egy halmaz *véges*, ha az őt alkotó számokat le tudjuk számolni, meg tudjuk mondani, hány darabból áll a halmaz. Egy halmaz *végtelen*, ha alkotóelemeit nem tudjuk leszámlálni, mint például az egész vagy valós számok esetében.