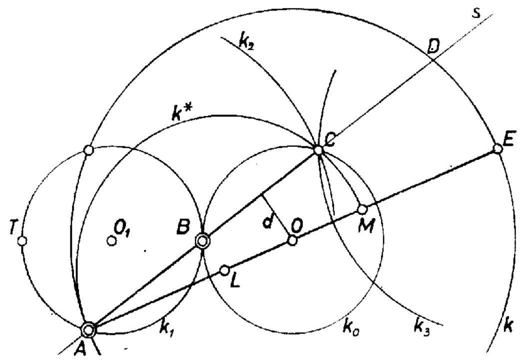
I. megoldás. Tegyük fel, hogy van megoldása a feladatnak, és jelöljük a szelőnek a körökkel való egymás utáni metszéspontjait rendre A, B, C, D betűvel. Eszerint A és D a nagyobbik körön, k-n vannak, B és C a kisebbik körön, k_0-on, és $AB = BC = CD = AD/3$. Legyen még köreink közös középpontja O és $OA = r$, $OB = r_0(< r)$.



Ha találtunk egy megfelelő s szelőt, és ennek O-tól mért távolsága $d(< r_0)$, akkor s-et O körül forgatva nyilvánvalóan minden helyzetében megfelel, vagyis az O körüli, d sugarú kör minden érintője megoldása a feladatnak – és más megoldás nincs is. (Lehet az is, hogy $d = 0$, vagyis a szelő átmegy O-n.) Ezért a szelőnek az egyik körön levő egyik metszéspontját szabadon megválaszthatjuk.

Válasszuk meg k_0-on B helyzetét. Ekkor A a C-nek B-re vonatkozó tükörképe, így A rajta van k_0-nak B-re vonatkozó k_1 tükörképén is, tehát A közös pontja k-nak és k_1-nek. Ezzel mindjárt eljárást is kaptunk A kijelölésére, és ekkor a keresett szelő az AB egyenes.

Az AB egyenes valóban megfelel. Ugyanis még egyszer metszi k és k_0 mindegyikét: k-t egy D pontban azért, mert az egyenes B pontja a k-ra nézve belső pont, k_0-t pedig azért, mert A-nak – mint k_1 egy pontjának – a B-re való C tükörképe a k_0-on van és $BA > 0$ miatt $BC = BA > 0$. Végül D az A-nak tükörképe a BC húr felező merőlegesére, hiszen ez a k-nak és k_0-nak közös szimmetriatengelye, tehát $DC = AB = BC$.

A k és k_1 körök közös pontjainak száma 2, 1 vagy 0 aszerint, hogy k_1-nek O-tól legtávolabbi T pontja kívül van k-n, vagy éppen ráesik – azaz k_1 belülről érinti k-t –, illetve ha T a k belsejében adódik. Mivel nyilvánvalóan $OT = 3r_0$, azért a megoldhatóság feltétele $3r_0 \geq r$. Egyenlőség esetén a szelő átmegy O-n. Ha k-nak és k_1-nek 2 közös pontja van, a belőlük adódó két szelőre nézve a fenti d körsugár egyező, tehát nem vezetnek különböző hosszúságú szelőkre.

Tábori László (Nagykanizsa, Landler J. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ugyanezt a megoldást mondhatjuk így is: C-t – mint A képét – kimetszi k_0 ból k-nak B-re vonatkozó k_2 tükörképe (ami persze koncentrikus k_1-gyel).

2. Hasonlósági transzformációval többféleképpen is megoldhatjuk a feladatot az A, B, C, D pontok közti távolságok egyszerű arányai alapján. (Tulajdonképpen az eddigi két tükrözés is ilyen, a nagyítási arány 1 volt.)

Egy ilyet írunk le a szelő k-n levő A pontjának megválasztásából kiindulva. Ekkor $AC : AB = 2$ alapján C-t kimetszi k_0 ból magának k_0 nak A-ból mint centrumból, a 2-szeresére nagyított k_3 képe és a szelő az AC egyenes.

II. megoldás. Tetszetős, egészen egyszerű ismereteket felhasználó megoldás a következő. Legyen k-nak a megválasztott A-val átellenes pontja E és az AE átmérőt harmadoló pontok L és M. Ekkor BL és CM párhuzamosak DE-vel, tehát merőlegesek a keresett húrra. Így C-t kimetszi k_0-ból az AM átmérő fölötti k^* Thalész-kör (amelynek középpontja L).

k^* csak akkor metszi k_0-t, ha M nincs kívül a k_0-on, vagyis ha

$$OM = \frac{OE}{3} = \frac{r}{3} \leq r_0,$$

a követelmény azonos a fentivel.

Vándor Tibor (Budapest, Kossuth L. Gimn., II. o. t.)

III. megoldás (vázlat). Legyen a BC, AD húrok közös felezőpontja F, és $OF = d$, $BF = h$, tehát $BC = 2h$, $AD = 6h$. Az OFB és OFA derékszögű háromszögekből

$$d^2 = r_0^2 - h^2 = r^2 - 9h^2,$$

$$h^2 = \frac{r^2 - r_0^2}{8} \quad \text{és} \quad 2h = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{r^2 - r_0^2},$$

$$d^2 = \frac{9r_0^2 - r^2}{8} \quad \text{és} \quad d = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{9r_0^2 - r^2}.$$

Ezek alapján akár h, akár d hossza, megfelelő derékszögű háromszögek és négyzetek felhasználásával megszerkeszthető, és a már ismert feltételek is kiadódnak.