A felbontás természetesen csak $k \leq n$ mellett lehetséges, ezt a továbbiakban feltesszük.

Az n számot természetes szám összegére csak *véges* sokféleképpen tudjuk felbontani, így az összes felbontás között biztosan lesz olyan, amelyben az összeadandók szorzata a legnagyobb (lásd az 1572. gyakorlat megoldásához fűzött megjegyzéseket)[1]. Tekintsünk egy ilyen, maximális szorzatú felbontást.

Először belátjuk, hogy ebben a felbontásban nem lehet két olyan tag, melyek különbsége 1-nél nagyobb.

Tegyük fel ugyanis, hogy a felbontásban szerepel u és v, és $u - v > 1$. Tekintsük n-nek azt a felbontását, amelyben u helyett $u - 1$, v helyett $v + 1$ szerepel, a többi tag pedig változatlan. Így a tagok összege továbbra is n, azonban a két új tag szorzatára

$$(u-1)(v+1) = u \cdot v + (u - v - 1) > u \cdot v,$$

így az új felbontásban szereplő tagok szorzata nagyobb lenne a régi szorzatnál – ellentétben azzal, hogy az maximális volt. Így egy maximális szorzatú felbontásban csak valamely u értékű tag (vagy tagok) és $u+1$ értékű tag (vagy tagok) szerepelhetnek.

Most megmutatjuk, hogy ilyen tulajdonságú felbontás mindig pontosan egy van, ez pedig azt jelenti, hogy ennek a felbontásnak kel1 a szélsőértéket szolgáltatnia. (Azt, bogy ilyen felbontás létezik, onnan tudjuk, hogy *van* szélsőértéket szolgáltató felbontás – annak pedig ezzel a tulajdonsággal rendelkeznie kell.)

Legyen a felbontásban szereplő, $(u+1)$-gyel egyenlő tagok száma t, $0 \leq t < k$. Ekkor az u-val egyenlő tagok száma k-t, azaz

$$n = (k - t) \cdot u + t \cdot (u + 1),$$

innen

$$u = \frac{n-t}{k}.$$

Figyelembe véve, hogy $0 \leq t < k$, láthatjuk, hogy u csak az n/k hányados egész része lehet; t pedig az osztáskor kapott maradék. Tehát a szorzat akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a felbontásban $\left(n - \left[\frac{n}{k}\right] \cdot k\right)$ számú tag egyenlő $\left[\frac{n}{k}\right] + 1$-gyel, a többi tag pedig $\left[\frac{n}{k}\right]$-val.

Gyenes László (Moszkva, 225. sz. Középiskola, IX. o. t.)

Megjegyzés. Vizsgáljuk meg, hogy ha k-t nem tekintjük adottnak, azaz ha n-t felbontjuk természetes számok összegére, akkor az összeadandók szorzata mikor lesz a lehető legnagyobb. A fenti meggondolásunk szerint ebben a felbontásban is csak 1-nél nem nagyobb különbségű tagok szerepelhetnek. (Ha nem így volna, a szorzatot a tagok számának változtatása nélkül is növelni tudnánk.) A felbontásban csak 5-nél kisebb tag fordulhat elő, mert $t \geq 5$ esetén $3(t - 3 \geq t + 1 > t$. Egynél több 4-es nem szerepelhet, mert $4 \cdot 4 < 3 \cdot 3 \cdot 2$. Ha egy 4-es szerepel, azt helyettesíthetjük $2 \cdot 2$-vel, a szorzat értéke nem változik, végül kettőnél több 2-es sem szerepelhet, mert $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$, 1-es pedig nyilván nem lehet.

Tehát a maximális felbontás:
ha $n = 3m$, akkor m db 3-as tag ($k = m$);
ha $n = 3m + 1$, akkor két 2-es (vagy egy 4-es) és m db 3-as; ($k = m$ vagy $m + 1$);
végül ha $n = 3m + 2$, akkor egy 2-es és m db 3-as tag ($k = m + 1$).

Homonnay Géza (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Gyenes László (Moszkva, 225. sz. Középiskola, IX. o. t.)

[1] Jelen számunk 140. oldalán.