I. megoldás. Bizonyítanunk kell, hogy

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq (abc)^{(a+b+c)}. \tag{1}$$

A jobb oldalon álló pozitív kifejezéssel osztva az egyenlőtlenség mindkét oldalát, majd átrendezve, a bizonyítandó egyenlőtlenség a következőbe megy át:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{a-c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} \geq 1.$$

A bal oldalon álló szorzat mindhárom tényezője legalább 1. Például az első azért, mert ha $a > b$, akkor $(a/b)^{a-b}$ egy egynél nagyobb szám pozitív kitevős hatványa, tehát maga is 1-nél nagyobb; ha $a = b$ úgy a hatvány értéke 1; ha $a < b$, akkor $(a/b)^{a-b}$ egy egynél kisebb szám negatív kitevős hatványa, tehát ismét csak 1-nél nagyobb.

Így a három 1-nél nem kisebb szám szorzata is legalább 1 lesz. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha mindhárom tényező 1, azaz ha $a = b = c$.

Révész Sz. György (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldás során nem használtuk ki, hogy a, b, c egészek, csak annyit, hogy pozitívak. Így tetszőleges pozitív a, b, c mellett érvényes (1).

2. A megoldás ötletét felhasználva kapjuk az a_1, a_2, …, a_n pozitív számokra, hogy

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{a_1-a_2} \cdot \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^{a_1-a_3} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{a_1-a_n} \cdot \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{a_2-a_3} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{a_{n-1}-a_n} \geq 1,$$

amiből átalakítások után az

$$(a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n})^n \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

egyenlőtlenséget nyerjük.

Révész Sz. György

II. megoldás. A bizonyítandó állítás nem változik, ha a benne szereplő a, b, c betűket tetszés szerint felcseréljük. (Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség *szimmetrikus* a benne szereplő változókra.) Cseréljük fel a betűket úgy, hogy az $a \geq b \geq c$ egyenlőtlenség fennálljon (ezt nyilván megtehetjük például úgy, hogy először a legnagyobbat cseréljük ki a-val, azután a maradék kettőt egymással felcseréljük, ha még szükséges). A bizonyítandó

$$a^{3a} b^{3b} c^{3c} \geq a^{a+b+c} b^{a+b+c} c^{a+b+c}$$

egyenlőtlenség mindkét oldalán $3a + 3b + 3c$ szám szorzata áll, és e szorzatokban néhány a-val egyenlő tényezőt b-vel egyenlő tényezők követnek, majd c-vel egyenlő tényezők zárják a sort. A különbség csak az, hogy

$$3a \geq a + b + c$$

miatt a jobb oldalon hamarabb találkozunk az a-val egyenlő tényezők után az első b-vel egyenlő tényezővel, és

$$3a + 3b \geq 2(a + b + c)$$

miatt az első c is hamarabb lép fel a jobb oldalon, mint a balon. Tehát a jobb oldalon álló szorzat tényezői rendre kisebbek, mint a bal oldali szorzat megfelelő tényezője, esetleg egyenlőek vele, így a jobb oldalon az egész szorzat kisebb, mint a hal oldalon álló szorzat, esetleg egyenlő vele.