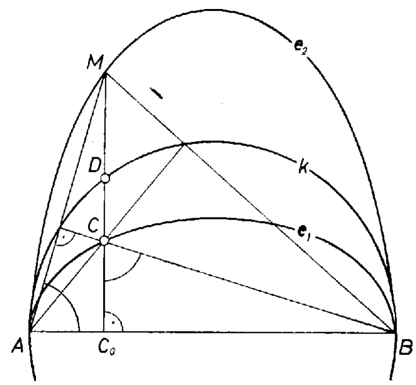
I. megoldás. 1. Legyen az ABC háromszög AB oldala az adott e_1 ellipszis nagytengelye, C csúcsa az e_1 tetszőleges pontja, A és B kivételével, és a háromszög magasságpontja M. Ekkor a CM magasságvonal az AB egyenest egy az A és B közti C_0 pontban metszi, CAC_0 és CBC_0 hegyesszögek. Jelöljük k-val az $AB=2a$ szakasz mint átmérő fölötti Thalész-kört, D-vel k-nak a C_0C félegyenesen levő pontját és $2b$-vel ellipszisünk kistengelyének hosszát. Ekkor minden egyes C pont a belőle származtatott D-nek a képe abban a merőleges affinitásban (összenyomásban), melynek tengelye az AB egyenes, arányszáma a $b/a=\lambda$ szám, amelyre $0<\lambda\leq 1$.



Mivel $MA\perp BC$, azért az MAC_0 és BCC_0 szögek – mint merőleges szárú hegyesszögek – egyenlők; másrészt nyilván $AD\perp DB$. Előbb az MAC_0, BCC_0, majd a BDC_0, DAC_0 derékszögű háromszögpár hasonlósága alapján

$$\frac{MC_0}{AC_0}=\frac{BC_0}{CC_0}=\frac{BC_0}{\lambda\cdot DC_0}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{DC_0}{AC_0},$$

amibő1

$$MC_0=\frac{1}{\lambda}\cdot DC_0=\frac{a}{b}\cdot DC_0.$$

Eszerint az M pont a D-ből $a/b(\geq 1)$ arányú nyújtással származik. Ezzel tulajdonképpen azt is kimondtuk, hogy M ugyanazon a partján van AB-nek, mint C, ezt azonban még igazolnunk kell. Valóban, C a k belsejében van, ezért az ACB szög tompaszög, és így az A-ból, B-ből induló magasságvonalak az ACB szög csúcsszögtartományában metszik egymást.

Mivel C előírt mozgása folyamán D bejárja k-nak minden pontját, azért M mindig rajta van a k-ból az AB tengelyű, a/b arányszámú nyújtással származó vonalon (magát A-t és B-t természetesen kivéve). Fordítva, ennek a vonalnak bármely M^* pontja előáll egy ABC^* háromszög magasságpontjaként, ehhez C^*-ot az M^*-ból AB-re bocsátott merőleges metszi ki e_1-ből, AB-nek az M^*-ot tartalmazó partján. A keresett mértani hely tehát a k kör képe a mondott nyújtásban. – Ez nyilvánvalóan egy e_2 ellipszis, amelynek kistengelye az AB szakasz, nagytengelye $AB\cdot(a/b)=2a^2/b$. – Mivel így e_2-ben a szimmetriatengelyek aránya ugyanaz, mint e_1-ben, azért ezt is mondhatjuk: M mértani helye forgatva nyújtással áll elő e_1-ből, a forgatás szöge 90°, a nyújtás aránya a/b, de A és B nem tartozik hozzá a mértani helyhez. Még másképpen: mivel k az e_1-ből és e_2 is a k-ból (a/b) arányú (és ugyanazon irányú) nyújtással keletkezik, azért – a k kör közvetítő szerepét kiiktatva – : e_2 az e_1 ből az AB-re merőleges, $(a/b)^2$ arányú nyújtással áll elő.

2. Azt az esetet, ha a beírt háromszög rögzített oldala az adott ellipszis kistengelye, visszavezethetjük eredményünkre, annak figyelembevételével, hogy ha az ABC háromszög magasságpontja M, akkor az ABM háromszög magasságpontja C. Valóban, e_2-t tekintve adottnak, és ha ABM az e_2-be beírt háromszög, aho1 AB az e_2-nek kistengelye. Így pedig C az e_1-et írja le, ami a kistengely mint átmérő fölötti Thalész-kör képe abban az affinitásban, melynek tengelye e_2 kistengelye, arányszáma pedig a rögzített oldal és a rá merőleges szimmetriatengely aránya. – Az arányszám ilyen értelmezése mellett az eredménynek a fenti, forgatva-nyújtásos származtatása ebben az esetben is érvényes.

3. Az $a=b$, azaz $\lambda=1$ esetben e_1 körré (k-vá) specializálódik, nincsenek kiemelt szimmetriatengelyek, e_2 azonos e_1-gyel. Ez a semmitmondó eredmény azt fejezi ki, hogy ekkor a beírt ABC háromszögben C-nél derékszög van, és a háromszög magasságpontja azonos C-vel.

Major Zoltán (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Vegyük alapul az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

egyenletű ellipszist, a beírt ABC háromszög A csúcsának a $(-a,0)$, B-nek az $(a,0)$, C-nek az (u,v) pontot, az utóbbira tehát teljesül

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,\quad \text{és}\quad |u|\neq a. \tag{1}$$

Ekkor az M magasságpont abszcisszája a C-ből induló magasságvonal révén u. Az AC egyenes iránytangense $v/(v+a)$, így a B-ből induló magasságvonal egyenlete

$$y=-\frac{u+a}{v}\,(x-a),$$

tehát M ordinátája. $x=u$ helyettesítéssel, majd (1) alapján u-t kiküszöbölve

$$y_M=-\frac{u^2-a^2}{v}=\frac{1}{v}\,(a^2-u^2)=\frac{a^2}{b^2}\,v. \tag{2}$$

Ebből ugyanúgy olvashatjuk ki M mértani helyének leírását, mint az I. megoldásban. Vagy pedig, (2)-ből (1) alapján v-t kiküszöbölve és $u=x_M$ átírással a mértani hely egyenlete

$$y_M=\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x_M^2},$$
$$\frac{x_M^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{(a^2/b)^2}=1,\quad \text{és}\quad |x_M|\neq a.$$

Mármost, a szokásos $a>b$ nagyságviszonyt tekintve, az az eset áll előttünk, amikor a beírt háromszög rögzített oldala az ellipszis nagytengelye. A számításban azonban ezt nem használtuk fel, az a $b>a$ esetére is érvényes, így egy csapásra azt az esetet is elintéztük, amelyben a kistengelyt rögzítjük a háromszög oldalának.

Szabó Kálmán (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Ajánljuk az érdeklődőknek a feladat módosításának a megvizsgálását arra az esetre, ha a beírt háromszög egyik oldala az adott ellipszisnek *tetszőleges*, rögzített átmérője.