

A rövidség kedvéért legyen $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}$, $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$. A nevezőt $(x+1)^2 + 1$ alakba írva látható, hogy $f(x)$ minden x -re értelmezett folytonos függvény és így a fenti integrál létezik. I értékének közelítő kiszámítására S felső és s alsó összeget keresünk, amelyre $\frac{S-s}{2} \leq 0,1$. Minthogy $s \leq I \leq S$, teljesül az $\left| I - \frac{S+s}{2} \right| < \frac{S-s}{2}$ becslés és így $\frac{S+s}{2}$ lesz a kívánt közelítés. Az $S-s$ eltérés becslése kényelmes, ha a szóban forgó függvény monoton. Valóban, ha valamely $g(x)$ függvény monoton fogyó, az $[a, b]$ intervallumon, akkor az $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ osztópontokkal n egyenlő részre osztva az intervallumot

$$S = \sum_{k=1}^n g(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}), \quad s = \sum_{k=1}^n g(x_k)(x_k - x_{k-1}),$$

$$S - s = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [g(x_{k-1}) - g(x_k)] = \frac{b-a}{n} (g(a) - g(b)), \quad \text{és}$$

nyilván hasonló állítás érvényes növekedő függvényekre is. Vizsgáljuk meg tehát, hogy a mi $f(x)$ függvényünk mely szakaszokon monoton. Mivel

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}, \quad \text{ha } -1 \leq x \leq 0, \quad \text{akkor } f'(x) \leq 0.$$

$f(x)$ tehát csökkenő, míg $0 \leq x \leq 1$, esetén $f'(x) \geq 0$, azaz $f(x)$ monoton növekedő. Alkalmazzuk ezért az

$$I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I_1 + I_2$$

felbontást. Osszuk 10 egyenlő részre a $[-1, 0]$ intervallumot, I_1 közelítése

$$\begin{aligned} \frac{S_1 + s_1}{2} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k-10}{10}\right) + f\left(\frac{k-1-10}{10}\right) \right] \cdot \frac{1}{10} = \\ &= \frac{1}{10} \left[\frac{1}{2} (f(0) + f(-1)) + \sum_{k=1}^9 f\left(\frac{-k}{10}\right) \right], \end{aligned}$$

és ennek hibája a fentiek szerint legfeljebb

$$\frac{S_1 - s_1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20}.$$

A $[0, 1]$ szakaszt 3 egyenlő részre bontjuk, I_2 közelítése

$$\frac{S_2 + s_2}{2} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k}{3}\right) + f\left(\frac{k-1}{3}\right) \right] \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (f(0) + f(1)) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right],$$

és ennek hibája legfeljebb

$$\frac{S_2 - s_2}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30},$$

(hiszen most $f(1) - f(0) = \frac{1}{5}$).

I értékét tehát az

$$\frac{S_1 + s_1 + S_2 + s_2}{2}$$

összeg legfeljebb

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{10} - \frac{1}{60}$$

hibával közelíti és így a számítás során még további $\frac{1}{60}$ -ad hibát követhetünk el. Eszerint $f\left(\frac{-k}{10}\right)$ értékét ($k =$

$1, \dots, 9$) továbbá az $f\left(\frac{1}{3}\right)$ és $f\left(\frac{2}{3}\right)$ számokat elég 3 tizedesig kiszámítani, mert így az elkövetett hiba legfeljebb

$$\frac{11}{1000} < \frac{1}{60}$$

A számítást végrehajtva az $I = 0,4$ értéket kapjuk.

Megjegyzés. Aki tudja, hogy a $\lg x$ függvény deriváltja $\frac{\lg e}{x}$ (ahol $e = 2,71828 \dots$), könnyen kiszámolhatja, hogy $I = 2 - \frac{\lg 5}{\lg e} = 0,391 \dots$. Eszerint a hibánk lényegesen kisebb 0,1-nél, ami nem meglepő, hiszen valamennyi becslésünkben igen nagyvonalúak voltunk.