Egy spárgadarab és valamilyen fémfelület közötti csúszási, ill. tapadási tényező meghatározására a megoldók igen sok egyszerű, mégis ötletes módszert használtak. Tekintsük át először a különböző módszerek elvi lényegét!

a) *„Lógatásos módszer.”* Ez talán a legegyszerűbb módszer a tapadási súrlódási együttható meghatározására. Egy darab spárgát az *1. ábrán* látható módon fektessünk rá egy vízszintes fémfelületre úgy, hogy a felület szélénél a spárga egy része lelógjon. Növeljük addig a lelógó rész hosszát, amíg a madzag éppen meg nem csúszik. Feltételezve, hogy a spárga tömegeloszlása homogén, és hogy a lap élénél a kötélerő nem változik ugrásszerűen, a tapadási súrlódási együttható a lelógó és az asztalon fekvő köteldarabok hosszainak hányadosaként kapható meg. (Valóban, az asztalon fekvő kötélrészre ható nyomóerő megegyezik ennek a köteldarabnak a súlyával, míg az erre a részre az élnél ható vízszintes húzóerő (amellyel a tapadási súrlódási erő tart egyensúlyt) megegyezik a lelógó rész súlyával.) A d) pontban, a *„tekeréses módszer”* vizsgálatánál látni fogjuk, hogy az élnél a kötelet feszítő erő ugrásszerűen változik, a vízszintes irányú erő $e^{-\mu_0\pi/2}$-szerese a függőleges irányú erőnek. (μ_0 a tapadási súrlódási együttható.) Ezt az ugrást csak kis μ_0 értékek mellett hanyagolhatjuk el.

1. ábra

b) „Direkt módszer.” E módszer közvetlenül a csúszási, ill. tapadási együttható definícióját használja föl. Helyezzünk ismert súlyú, spárgával „bevont” testet (vagy spárga-gombolyagot) vízszintes fémfelületre, és mérjük meg a test nyugalomból való kimozdításához, ill. egyenletes sebességgel való mozgatásához szükséges vízszintes húzóerőt. A húzóerők és a súly hányadosa megadja a súrlódási együtthatókat. (Természetesen a mérést végezhetjük fordított elrendezésben is: a vízszintes felületet vonjuk be spárgával, és ezen húzunk egy fém testet. A mérést úgy is elvégezhetjük, hogy két ismert erővel egymáshoz szorított fémlap között húzzuk a madzagot.)

c) *„Lejtős módszer.”* Spárgával bevont testet helyezzünk sima, változtatható hajlásszögű fém lejtőre (*2. ábra*). A lejtő hajlásszögét lassan növeljük addig, amíg a test éppen meg nem csúszik. Jelölje ezt a kritikus dőlésszöget α_0, a test tömegét pedig m. Ebben a helyzetben a $\mu_0 mg\cos\alpha_0$ nagyságú, a lejtővel párhuzamos irányú tapadási súrlódási erő tart egyensúlyt a nehézségi erő $mg\sin\alpha_0$ nagyságú, lejtő irányú komponensével, így a tapadási súrlódási együttható $\mu_0 = \operatorname{tg}\alpha_0$. A csúszási súrlódási együttható annak a hajlásszögnek a tangensével egyezik meg, amely mellett a testet kicsit megpöckölve az egyenletesen (nem gyorsulva) csúszik le a lejtőn.

2. ábra

d) „Tekercseléses módszer." A módszer lényege az, hogy a spárgát ismert φ szögben rátekerjük egy sima, kör keresztmetszetű fémrúdra, és megmérjük, hogy a spárga egyik végét ismert erővel húzva mekkora erőt kell kifejtenünk a spárga másik végén ahhoz, hogy az éppen ne mozduljon el, ill. hogy állandó sebességgel csússzon (*3. ábra*). A megfeszített madzag rászorul a hengeres fémrúdra, a felcsavart kötélszakasz mentén tapadási, ill. csúszási súrlódási erő lép fel, amely megegyezik a kötél két végénél ható erők különbségével. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik a kötélben az $F(\varphi)$ feszítőerő a φ felcsavarodási szög függvényében! A *4. ábra* a felcsavart kötél egy kis $\Delta\varphi$ szöghöz tartozó szakaszát mutatja kinagyítva. Látható, hogy e kis szakasz két végénél ható $F(\varphi)$, ill. $F(\varphi+\Delta\varphi)$ nagyságú erő sugárirányú komponenseinek összege

$$\Delta N(\varphi)=\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\big(F(\varphi)+F(\varphi+\Delta\varphi)\big)\approx\frac{\Delta\varphi}{2}\big(F(\varphi)+F(\varphi)\big)=\Delta\varphi F(\varphi),$$

míg az érintő irányú komponensek összege

$$\Delta T(\varphi)=\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\big(F(\varphi)-F(\varphi+\Delta\varphi)\big)\approx-\big(F(\varphi+\Delta\varphi)-F(\varphi)\big).$$

E két mennyiség hányadosa éppen a súrlódási együttható, így az F függvényre kis $\Delta\varphi$ esetén teljesül, hogy

$$\frac{F(\varphi+\Delta\varphi)-F(\varphi)}{\Delta\varphi}=-\mu F(\varphi).$$

Ismeretes, hogy az ilyen tulajdonságú függvények az exponenciális függvények, azaz

$$(*)\qquad F(\varphi)=F(0)e^{-\mu\varphi},$$

tehát a felcsavart kötélben a feszítőerő a rúd sugarától függetlenül a szöggel exponenciálisan csökken. Az a) pontban a *„lógatásos módszernél”* az él hatása tekinthető úgy, mintha a spárga nagyon kis sugarú, $\pi/2$ szögű körívre lenne ráfektetve, így a kötélerő az élnél valóban az $e^{-\mu_0\pi/2}$-szeresére csökken.

3. ábra

3. ábra

4. ábra

Major Zsuzsanna (Stuttgart, Friedrich-Eugens Gymnasium, III. o.t.) mérését a fenti módszerrel végezte. Fémrúdra néhányszor rátekert madzag két végénél mérte a kötélerőt úgy, hogy a madzag még éppen nem csúszott meg (tapadási súrlódási együttható mérése), ill. úgy, hogy a kötél egyenletes sebességgel csúszott (csúszási súrlódási együttható mérése). A $(*)$ összefüggésből látható, hogy $\ln\left(\dfrac{F(0)}{F(\varphi)}\right) = \mu\varphi$, így a két kötélvégen ható erő hányadosának logaritmusát ábrázolva a feltekercselés szögének függvényében egyenest kapunk, amelynek meredeksége éppen a keresett súrlódási együttható. Ezen egyenesek láthatók az *1.*, ill. *2. grafikonon*. A mért csúszási együttható $\mu = 0{,}21 \pm 0{,}03$, a mért tapadási súrlódási együttható pedig $\mu_0 = 0{,}18 \pm 0{,}015$. (Más minőségű anyagpárok esetén természetesen ettől eltérő értékek is kijöhetnek.) Meglepő módon a tapadási súrlódási együttható mért értéke kisebb, mint a csúszási súrlódási együtthatóé, ezt valószínűleg a csúszási súrlódási együttható sebességfüggése okozza.

1. grafikon. A csúszási súrlódás mérése

2. grafikon. A tapadási súrlódás mérése

2. grafikon. A tapadási súrlódás mérése