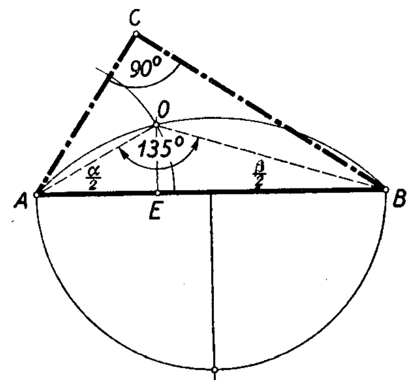
I. megoldás. A derékszögű háromszög beírt körének középpontjából az átfogó $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 135^\circ$ alatt látszik. A beírt kör O középpontja tehát egyrészt az érintési pontban az átfogóra emelt merőlegesen; másrészt az AB átfogó fölé szerkesztett 135°-os látószögű köríven van (1. ábra).



1. ábra

A beírt kör középpontját összekötjük az átfogó végpontjaival, így nyerjük a hegyesszögek szögfelezőit. Tükrözzük az átfogó egyenesét a két szögfelezőre nézve, így megkapjuk a befogók egyeneseit, ezek metszéspontjában a háromszög C csúcsát. (Ha a második látókörívet vesszük figyelembe, akkor a háromszög tükörképét nyerjük, tehát mindig van egy és csakis egy megoldás.)

Pulay Péter (Bp. I., Petőfi g. I. o. t.)

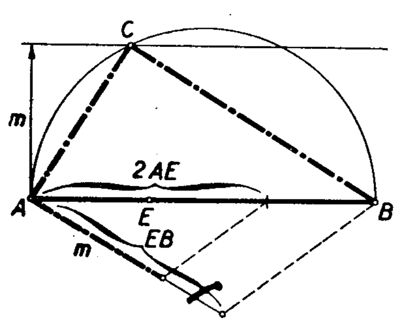
II. megoldás. A 251. gyakorlat megoldásával (XI. kötet, 2. szám, 1955. október, 45. old.) bebizonyítottuk, hogy a derékszögű háromszög átfogóját a beírt kör érintési pontja két olyan részre bontja, melyek szorzata egyenlő a háromszög területével:

$$AE \cdot EB = \frac{c \cdot m}{2},$$

tehát

$$c : 2AE = EB : m,$$

ahonnan m mint c, $2AE$ és EB negyedik arányosa szerkeszthető (2. ábra).



2. ábra

Ruppentahl Péter (Győr, Révai M. g. II. o. t.)

Megjegyzés: Kimutatjuk még, hogy mindig van egy, és csakis egy megoldás.

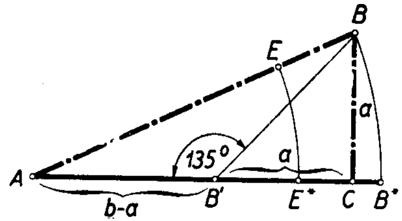
Az előbbihez elég megmutatni, hogy $m < \frac{c}{2}$.

A mértani és számtani középre vonatkozó egyenlőtlenség felhasználásával

$$m = \frac{2}{c} AE \cdot EB < \frac{2}{c}\left(\frac{AE + EB}{2}\right)^2 = \frac{2}{c} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c}{2}.$$

Az átfogóval, m távolságban, párhuzamosan húzott egyenes a Thales–kört ugyan 2 pontban metszi (2. ábra), de csak az a pont felel meg C csúcspontnak, amely ahhoz a csúcsponthoz van közelebb, amelyhez az E pont.

III. megoldás. Ismeretes, hogy a beírt kör érintési pontja az átfogót $s-a$ és $s-b$ hosszúságú két szakaszra bontja (s a háromszög félkerülete). A két szakasz különbsége $|(s-a)-(s-b)| = |b-a| = |AE - EB|$, tehát adott. További feladatunk a derékszögű háromszöget az átfogóból és a befogók különbségéből megszerkeszteni.



3. ábra

A kész, 3. ábráról a szerkesztést, leolvashatjuk: a $b-a=AB'$ szakasz B végpontjából a szakasszal 135°-os szöget bezáró félegyenest húzunk, melyet a szakasz A végpontjából rajzolt $c=AB$ sugarú körívvel elmetszünk; végül a metszéspontból a $b-a$ szakasz meghosszabbítására merőlegest bocsátunk.

A megoldás létezése és egyértelműsége nyilvánvaló.

Sasczay Ágnes (Bp. IX., Patrona Hungariae lg. I. o. t.)