Tudjuk, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek minimuma van az $x = -\dfrac{b}{2a}$ helyen, feltéve hogy $a > 0$.

A szélsőérték helye jelen esetben

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{8},$$

amiből

$$a = 4b,$$

vagyis

$$2^{3u-5v-3} - 1 = 4(2^{7u-8v-18} - 2^{4u-3v-15}).$$

Ebből

$$2^{3u-5v-3} - 1 = 2^{7u-8v-16} - 2^{4u-3v-13} = 2^{4u-3v-13}(2^{3u-5v-3} - 1),$$

vagy 0-ra redukálva az egyenletet

$$(2^{3u-5v-3} - 1)(2^{4u-3v-13} - 1) = 0.$$

Ebből következik, hogy a bal oldal valamelyik tényezője maga is nulla. Azonban az első tényező nem lehet nulla, mert az $y = f(x)$ függvényben ez a másodfokú tag együtthatója.

Tehát kell, hogy

$$2^{4u-3v-13} - 1 = 0,$$

és ebből (mivel 2-nek csakis nulladik hatványa 1)

$$4u - 3v - 13 = 0.$$

E diofantoszi egyenlet megoldása

$$v = u - 4 + \frac{u-1}{3} = u - 4 + z,$$

ahol

$$z = \frac{u-1}{3},$$

és így

(1) $$u = 3z + 1, \qquad \text{és}$$
(2) $$v = 4z - 3$$

(Mivel u és v pozitív egész paraméterek

(3) $$u = 3z + 1 > 0,$$
(4) $$v = 4z - 3 > 0$$

$$(3)\text{-ból } z > -\frac{1}{3}, \qquad (4)\text{-ből } z > \frac{3}{4};$$

ez utóbbi magában foglalja az előbbit.

Másrészt mivel a feltétel szerint minimumról van szó, azért a másodfokú tag együtthatója feltétlenül pozitív, vagyis

$$2^{3u-5v-3} - 1 > 0,$$

ami csak akkor állhat, ha

$$3u - 5v - 3 > 0,$$

u és v értékeit (1) és (2)-ből behelyettesítve nyerjük, hogy

$$9z + 3 - 20z + 15 - 3 > 0,$$

azaz

$$z < \frac{15}{11}.$$

Tehát

$$\frac{3}{4} < z < \frac{15}{11},$$

vagyis z értéke csak 1 lehet, és így

$$u = 3z + 1 = 4, \qquad v = 4z - 3 = 1.$$

u és v ezen értékeit $y=f(x)$-be helyettesítve:

$$y=f(x)=15x^2+\frac{15}{4}x+\frac{11t^2-20}{154-10t^2}.$$

Hogy az $x=-\dfrac{1}{8}$ helyen pozitív minimum legyen, kell hogy

$$f\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{15}{64}+\frac{11t^2-20}{154-10t^2}>0,$$

amiből a közös nevezőre hozás után

$$\frac{854t^2-3590}{64(154-10t^2)}>0.$$

Mivel egy tört akkor pozitív, ha a számláló és nevező megegyező előjelű, tehát az egyik lehetőség

$$854t^2-3590>0.$$

Ebből

$$t^2>\frac{3590}{854}>4.$$

Továbbá

$$154-10t^2>0,$$

ahonnan

$$t^2<\frac{154}{10}<16,$$

vagyis

$$4<t^2<16.$$

A másik lehetőség – hogy a számláló és nevező egyidejűleg negatív – ellentmondásra vezet, az egyetlen pozitív egész t érték 3.

$u=4,\quad v=1\quad$ és $\quad t=3\quad$ esetén

$$y=f(x)=15x^2+\frac{15}{4}x+\frac{79}{64}.$$

Bartók Károly (Székesfehérvár, József A. g. II. o. t.)