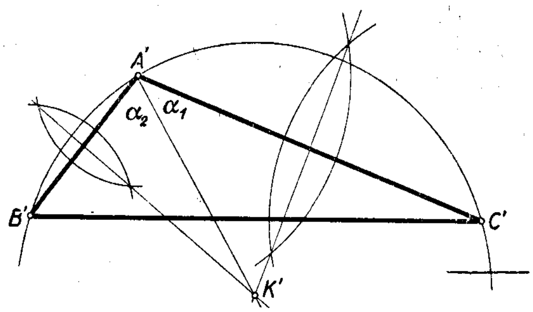
I. megoldás: Szerkesszük meg az adott $A'B'C'\triangle$ köré írható kör középpontját K'-t (1. ábra).



1. ábra

Jelöljük a $K'A'C'\sphericalangle$-et α_1-gyel, a $K'A'B'\sphericalangle$-et α_2-vel. (Tehát vagy $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, vagy $|\alpha_1-\alpha_2|=\alpha$, ahol α az adott háromszög A'-nél fekvő szöge.)

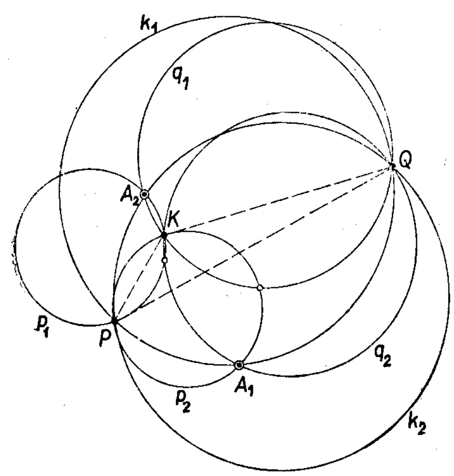
A szerkesztendő háromszög A csúcsából

(1) a helyzetre és nagyságra adott PK szakasz (2. ábra) α_1, ill. $180^\circ-\alpha_1$ szög alatt látszik aszerint, hogy hol helyezkedik el a P pont az AC oldalon;

(2) a helyzetre és nagyságra megadott QK szakasz α_2, ill. $180^\circ-\alpha_2$ szög alatt,

(3) az ugyancsak helyzetre és nagyságra megadott PQ szakasz pedig $\alpha_1+\alpha_2$, ill. $180^\circ-(\alpha_1+\alpha_2)$ vagy $|\alpha_1-\alpha_2|$, ill. $180^\circ-|\alpha_1-\alpha_2|$ szög alatt látszik.

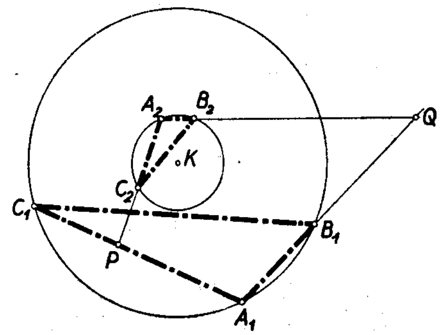
Az (1) és (2) feltételeket kielégítő pontok mértani helye a p_1 és p_2, ill. q_1 és q_2 teljes látószögkörök (2. ábra).



2. ábra

E négy körnek (P, K, Q-n kívül még) négy közös pontja van, amelyek közül azonban csak azok megoldások, amelyek a (3) alatti feltétel által meghatározott k_1 és k_2 teljes körökből álló mértani helyen is rajta vannak. (Jelen esetben az $\alpha_1+\alpha_2$, ill. $180-(\alpha_1+\alpha_2)$ látószögek jönnek tekintetbe.) Általában egyetlen k kör sem mehet át a p és q köröknek egynél több metszéspontján, mert különben a P-n és Q-n átmenő k kör ***két pontjából*** a PK szakasz α_1, és QK szakasz pedig α_2 szög alatt látszik, ami csak úgy lehet, hogy K rajta van az illető k körön, vagyis az egyik k kör azonos a PKQ körrel, és egyszersmind ezzel azonos egy-egy p, ill. q kör is. Ez esetben a feladatnak végtelen sok megoldása van. Ez akkor jön létre, amikor $PKQ\sphericalangle=\alpha$, vagy $180^\circ-\alpha$. Egy további megoldást ez esetben a nem speciális k, p, q körök közös metszéspontja szolgáltat.

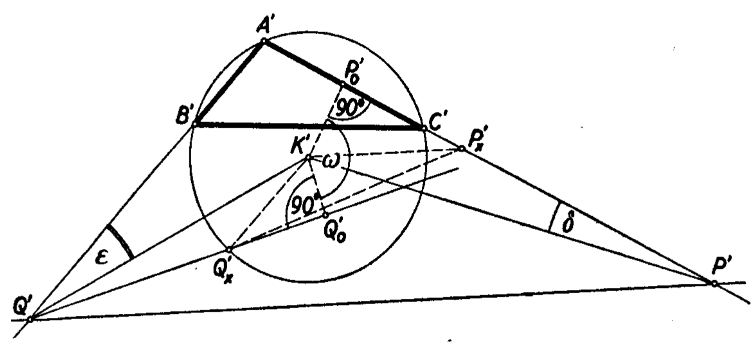
E kivételes esettől eltekintve két megoldást kapunk: A_1-et és A_2-t (2. ábra), amint az egyébként az alábbi II. megoldásból is kitűnik. A jobb áttekintés végett a 3. ábrában az adott K, P, Q pontokhoz átmásoltuk a 2. ábrában megszerkesztett A_1 és A_2 pontokat.



3. ábra

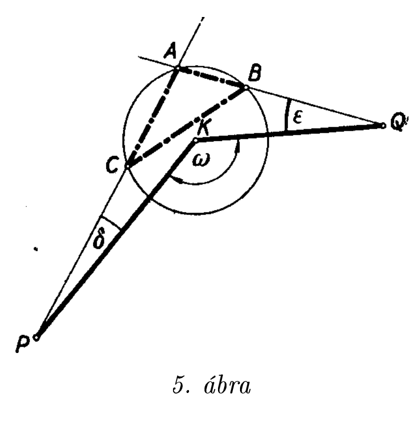
A KA_1, ill. KA_2 sugárral rajzolt körök metszik ki az A_1Q és A_1P, ill. A_2Q és A_2P egyenesekből a B_1 és C_1, ill. B_2 és C_2 pontokat.

II. megoldás: A feladatot a következőképpen fogalmazzuk át: Szerkesszünk egy adott $A'B'C'\triangle$-höz egy olyan $K'P'Q'\triangle$-et, amely hasonló az adott $KPQ\triangle$-höz (5. ábra), P' az $A'C'$ oldalon, Q' az $A'B'$ oldalon van, K' pedig az $A'B'C'\triangle$ köré írt kör középpontja.



4. ábra

Mindenekelőtt megszerkesztjük a K' pontot (4. ábra). Az $A'C'$ oldalon felveszünk egy tetszőleges P'_x pontot. $K'P'_x$ fölé egy a $KPQ\triangle$-höz hasonló $K'P'_xQ'_x\triangle$-et szerkeszteni nem más, mint a $K'P'_x$ szakaszt a $PKQ\sphericalangle=\omega$ szöggel K' körül elforgatni és $\dfrac{KQ}{KP}$ arányban zsugorítani (vagy nyújtani). Így nyerjük a Q'_x pontot. Ha P'_x az $A'C'$ egyenesen mozog, akkor a forgatva-nyújtás által nyert Q'_x pont mint ismeretes – szintén egyenest ír le, mégpedig az $A'C$ egyenesnek ugyanilyen forgatás és nyújtás által nyert transzformált egyenesét. Ez utóbbi egyenes metszi az $A'B'$ oldalt a Q' pontban (4. ábra). A $K'Q'$ szakaszt ω szöggel visszaforgatva és $\dfrac{KP}{KQ}$ arányban megnyújtva nyerjük az $A'C'$ oldalon a P' pontot.



5. ábra

A $K'P'A'\sphericalangle=\delta$ és $K'Q'A'=\varepsilon$ szögek átmásolásával kapjuk meg az 5. ábrában az A pontot. A K pont köré KA sugárral rajzolt kör metszi ki az AQ és AP egyenesekből a B, ill. C pontot.

Mivel az ω szöggel való elforgatás két irányban történhetik, azért feladatunknak 2 megoldása van.

Ha $\omega=180°-\alpha$ és K' az α szög szárai között van, vagy $\omega=\alpha$ és K nincs az α szárai között, akkor az egyik irányú forgatás esetén Q' a végtelenbe kerül és a megoldások száma végtelen sok, az ellenkező értelmű forgatva-nyújtás még egy további megoldást eredményez.

Stahl János (Bp. VI., Kölcsey g. II. o. t.)