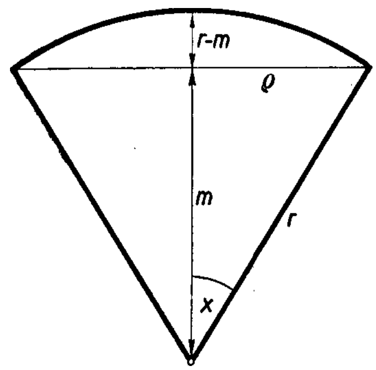
I. megoldás: *a)* Archimedes ismeretes törvénye alapján, a gömbcikk súlya megegyezik a vízbe merülő térfogatrész (jelen esetben a forgáskúp) által kiszorított víz súlyával. Ha a gömbcikk köbtartalmát K-val, a forgáskúp köbtartalmát K'-vel jelöljük, akkor (mivel a víz fajsúlya 1)

$$K\cdot s=K'\cdot 1. \tag{1}$$

Ábránk a gömbcikk tengelymetszetét és egyben a betűzést mutatja.



Eszerint

$$K=\frac{2r^2\pi(r-m)}{3},\qquad K'=\frac{\varrho^2\pi m}{3}.$$

Ezen értékeket (1)-be helyettesítve és $\frac{\pi}{3}$-dal egyszerűsítve

$$2r^2(r-m)s=\varrho^2 m. \tag{2}$$

Ha az itt szereplő ϱ és m mértékszámokat r-rel, és a forgáskúp x félnyílásával fejezzük ki:

$$\varrho=r\sin x,\qquad m=r\cos x,$$

és így $r-m=r(1-\cos x)$, akkor nyerjük, hogy

$$2sr^3(1-\cos x)=r^3\sin^2 x\cos x.$$

$\sin^2 x$ helyébe $1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x)$-et írva és mindkét oldalt $r^3(1-\cos x)$-szel egyszerűsítve ($0<x<\frac{\pi}{2}$ miatt $1-\cos x\neq 0$)

$$2s=\cos x+\cos^2 x,\qquad \text{vagyis}\qquad \cos^2 x+\cos x-2s=0.$$

Mivel $0<x<\frac{\pi}{2}$, azért csak a pozitív gyöknek van értelme. Tehát

$$\cos x=\frac{-1+\sqrt{1+8s}}{2}.$$

b) A feladat megoldható, ha

$$0<\frac{\sqrt{1+8s}-1}{2}<1,$$

amiből

$$1<\sqrt{1+8s}<3,\qquad \text{azaz}\qquad 0<s<1,$$

vagyis a megoldhatóság feltétele megegyezik a fizikából ismert általános úszási feltétellel.

c) $s=0{,}75$ esetén

$$\cos x=\frac{\sqrt{7}-1}{2}\approx 0{,}8229,\qquad \text{és így}\qquad x=34^\circ 37'.$$

Argay Gyula (Balassagyarmat, Balassi B. g. III. o. t.)

II. megoldás: Pythagoras tétele alapján

$$\varrho^2=r^2-m^2.$$

Ezen értéket (2)-be helyettesítve és $(r-m)$-mel egyszerűsítve

$$2r^2 s=(r+m)m,$$

m szerint rendezve a következő másodfokú egyenlet adódik

$$m^2+rm-2r^2s=0.$$

Ennek pozitív gyöke

$$m=\frac{\sqrt{1+8s}-1}{2}r.$$

A megoldhatóság feltétele most

$$0<\frac{\sqrt{1+8s}-1}{2}r<r,$$

amiből ugyancsak a $0<s<1$ feltételt kapjuk.

A kúp félnyílására

$$\cos x=\frac{m}{r}=\frac{\sqrt{1+2s}-1}{2}.$$

adódik, mint az I. megoldásban.

Pogány Eörs (Bp., V., Eötvös J. g. III. o. t.)