I. megoldás: Ismeretes, hogy a háromszög súlyvonalai az oldalakkal a következőképpen fejezhetők ki (II. oszt. gimn. tankönyvön kívül lásd K. M. L. VII. kötet, 3–4. szám. 1953. nov. 510. feladat 88–89. oldal):

$$
\begin{aligned}
s_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2},\\
s_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2},\\
s_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

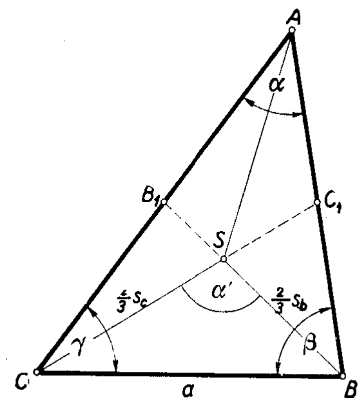
A cosinus-tétel alapján

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

és így

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin\alpha} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4t}, \tag{4}$$

ahol t a háromszög területe (1. ábra).



1. ábra

A (4) összefüggést a $BCS_\triangle$-ben α'-re alkalmazva, (3) figyelembevételével

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\alpha' &= \frac{\left(\frac{2}{3}s_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}s_c\right)^2-a^2}{4\cdot\frac{t}{3}} = \frac{4s_b^2+4s_c^2-9a^2}{12t} = \\
&= \frac{(2a^2+2c^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)-9a^2}{12t} = \frac{b^2+c^2-5a^2}{12t}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Másrészt (4) alapján

$$2\operatorname{cotg}\beta + 2\operatorname{cotg}\gamma = \frac{a^2+c^2-b^2}{2t}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2t} = \frac{a^2}{t},$$

és így (5) felhasználásával

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\alpha - (2\operatorname{cotg}\beta+2\operatorname{cotg}\gamma) &= \frac{b^2+c^2-a^2}{4t} - \frac{4a^2}{4t} = \\
&= \frac{b^2+c^2-5a^2}{4t} = 3\operatorname{cotg}\alpha'.
\end{aligned}
$$

Ezzel az (1) összefüggést bebizonyítottuk.

(5) alapján

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\alpha' + \operatorname{cotg}\beta' + \operatorname{cotg}\gamma' &= \frac{b^2+c^2-5a^2+a^2+c^2-5b^2+a^2+b^2-5c^2}{12t} = \\
&= \frac{-3a^2-3b^2-3c^2}{12t} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{4t}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

(4) alapján

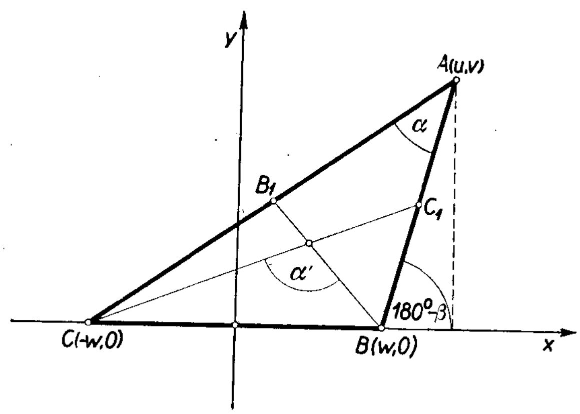
$$\text{(7)} \qquad \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4t} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}.$$

(6) és (7) összevetéséből következik a bizonyítandó (2) összefüggés.

Ádám Antal (Bp., VIII., Széchenyi g. III. o. t.)

II. megoldás: A súlyvonalak és oldalak közötti összefüggés, valamint a cosinus-tétel felhasználása nélkül is bizonyítható tételünk.

Helyezzük el az ABC háromszöget egy derékszögű koordináta-rendszerben, amint azt a 2. ábra mutatja.



2. ábra

A BA egyenes irányhatározója $m_1 = \dfrac{v}{u-w}$, a CA egyenesé $m_2 = \dfrac{v}{u+w}$, tehát az általuk bezárt α szögre

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1 + m_1 m_2}{m_1 - m_2} = \frac{1 + \dfrac{v^2}{(v-w)(v+w)}}{\dfrac{v}{u-w} - \dfrac{v}{u+w}} = \frac{u^2 - w^2 + v^2}{v(u+w) - v(u-w)} = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2vw}.$$

Az ábráról közvetlenül leolvasható:

$$\operatorname{cotg}\beta = -\operatorname{cotg}(180^\circ - \beta) = -\frac{u-w}{v}, \qquad \operatorname{cotg}\gamma = \frac{u+w}{v},$$

tehát

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{cotg}\alpha - 2\operatorname{cotg}\beta - 2\operatorname{cotg}\gamma = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2vw} + \frac{2u - 2w}{v} - \frac{2u + 2w}{v} = \frac{u^2 + v^2 - w^2 + 4uw - 4w^2 - 4uw - 4w^2}{2vw} = \frac{u^2 + v^2 - 9w^2}{2vw}.$$

A B_1 és C_1 oldalfelezőpontok koordinátái: $\left(\dfrac{u-v}{2}, \dfrac{v}{2}\right)$, ill. $\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v}{2}\right)$, és így a BB_1, ill. CC_1 súlyvonalak iránytangensei

$$m_1' = \frac{\dfrac{v}{2}}{\dfrac{u-w}{2} - w} = \frac{v}{u - 3w}, \quad m_2' = \frac{\dfrac{v}{2}}{\dfrac{u+w}{2} + w} = \frac{v}{u + 3w}.$$

Tehát az általuk bezárt α' szögre

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{cotg} a' = \frac{1 + m_1' m_2'}{m_1' - m_2'} = \frac{1 + \dfrac{v^2}{(u-3w)(u+3w)}}{\dfrac{v}{u-3w} - \dfrac{v}{u+3w}} = \frac{u^2 - 9w^2 + v^2}{v(u+3w) - v(u-3w)} = \frac{u^2 + v^2 - 9w^2}{6vw}.$$

(8) és (9) összevetése szolgáltatja (1)-et.

Ha az (1) összefüggést mindhárom szögre felírjuk:

$$\begin{aligned}
3\operatorname{cotg}\alpha' &= \operatorname{cotg}\alpha - 2\operatorname{cotg}\beta - 2\operatorname{cotg}\gamma,\\
3\operatorname{cotg}\beta' &= \operatorname{cotg}\beta - 2\operatorname{cotg}\alpha - 2\operatorname{cotg}\gamma,\\
3\operatorname{cotg}\gamma' &= \operatorname{cotg}\gamma - 2\operatorname{cotg}\alpha - 2\operatorname{cotg}\beta,
\end{aligned}$$

e három egyenletet összeadjuk és mindkét oldalt hárommal osztjuk, nyerjük a bizonyítandó (2) összefüggést.

Kaiser Marianna (Bp., II., Hámán Kató lg. IV. o. t.)