I. megoldás: A szabályos tizennyolcszöget 18 egybevágó egyenlő szárú háromszögre bontjuk. Egy ilyen háromszög alapja a, a szemközti középponti szög $\frac{360°}{18} = 20°$. Az a-hoz tartozó magasság (a sokszögbe írt kör sugara) a háromszöget két derékszögű háromszögre bontja. Innen fejezzük ki a háromszoros szög, vagyis $30°$ sinusát a $\sin 10°$-kal.
$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$

Ennek alapján

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = 3\sin 10° - 4\sin^3 10°,$$

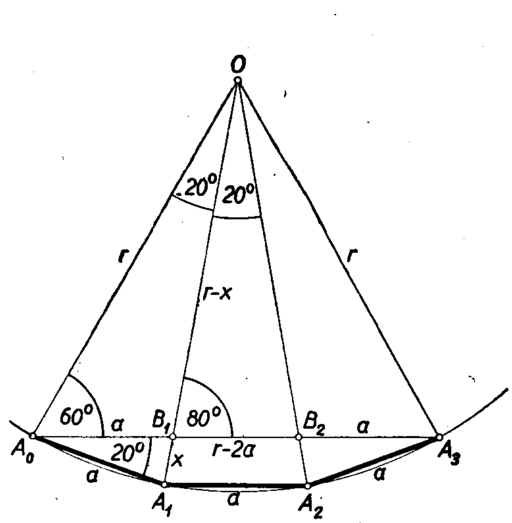
azaz

$$\frac{1}{2} = 3\cdot\frac{a}{2r} - 4\left(\frac{a}{2r}\right)^3,$$

ahonnan a megfelelő átalakítások és rendezés után a bizonyítandó állításhoz jutunk.

Opitz Klára (Bp. VIII., Kandó Kálmán ip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Trigonometria nélkül is bizonyíthatjuk a feladat állítását. Tekintsük az O középpontú és r sugarú körbe írt $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_{17}$, szabályos tizennyolcszög első 3 oldalát a hozzátartozó O csúcsú egybevágó egyenlőszárú háromszögekkel együtt (lásd az ábrát).



E háromszög szögei $20°$, $80°$, $80°$. Mivel $A_0OA_3\sphericalangle = 60°$, azért az $A_0OA_3\Delta$ egyenlő oldalú. Jelöljük az A_0A_3 szakasz metszéspontját az OA_1, és OA_2, körsugarakkal B_1, ill. B_2-vel. A szimmetriaviszonyok folytán $B_1B_2 \parallel A_1A_2$ így az $OB_1B_2\Delta$ szögei szintén $20°$, $80°$, $80°$. A keletkezett $A_0A_1B_1\Delta$-ben az A_0-nál fekvő szög $80° - 60° = 20°$, B-nél levő szög pedig mint csúcsszög $80°$, tehát $A_0A_1B_1\Delta \sim OA_0A_1\Delta \sim OB_1B_2\Delta$.

Ezek szerint $A_0B_1 = B_2A_3 = a$, és így $B_1B_2 = A_0A_3 - 2a = r - 2a$. Az A_1B_1 szakaszt x-szel jelölve $x : a = a : r$, amiből $x = \frac{a^2}{r}$.
Másrészt

$(r-2a) : (r-x) = a : r.$

x helyébe $\frac{a^2}{r}$-t írva $\qquad r(r-2a) = a\left(r - \frac{a^2}{r}\right),$

amiből a bizonyítandó állítás következik.

Hidas Péter (Bp. VIII., Vörösmarty g. IV. o. t.)