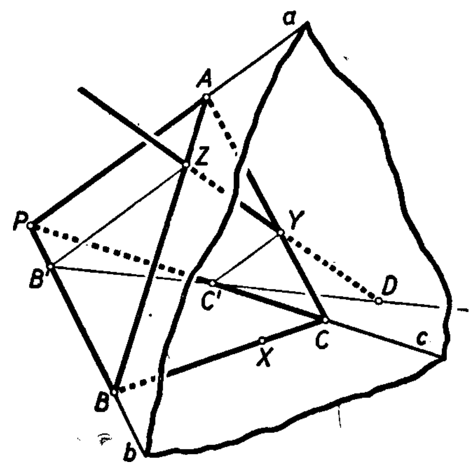
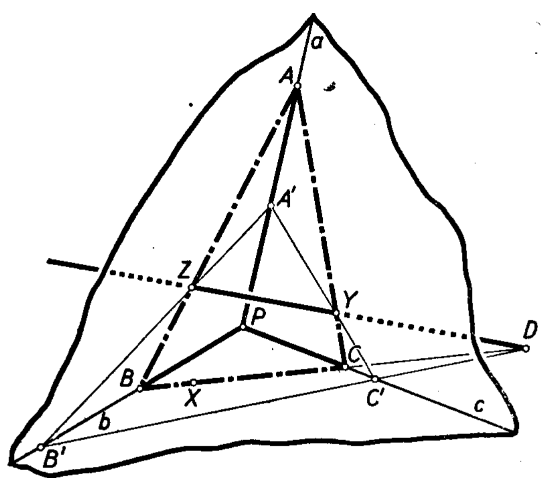
I. megoldás: *a)* Az a, b, c félegyenesek ne legyenek egy síkban. Ez esetben egy 3-oldalú (vagy 3-élű) testszögletet (triédert) határoznak meg. Az X, Y, Z pontok, amelyek a feladat szerint más-más triéder lapon fekszenek, egy síkot határoznak meg. E sík metszi ki a triéderből a keresett háromszöget. Elég megszerkeszteni az $[XYZ]$ síknak metszés vonalát a $[bc]$ síkkal, mert e metszésvonal metszi ki a b és c egyenesekből a keresett háromszög B és C csúcspontjait, amelyeket összekötve Z, ill. Y-nal, megkapjuk a háromszög második és harmadik oldalát, amelyek az a-n fekvő A pontban metszik egymást (lásd 1. és 2. ábrát). Ha A nem a félegyenesre, hanem annak P-n túli meghosszabbítására vagy nem a végesbe kerül, akkor a feladatnak nincs megoldása.



1. ábra



2. ábra

Az $[XYZ]$ síknak a $[bc]$ síkkal való metszésvonalának egy pontját, az X-et ismerjük; egy másik pontját a ZY egyenesnek a $[bc]$ síkkal való D döféspontja szolgáltatja. Ismeretes, hogy egyenes és sík döféspontját úgy határozzuk meg, hogy az egyenesen át fektetett tetszőleges segédsíknak határozzuk meg a metszésvonalát az adott síkkal. E metszésvonal és az adott egyenes metszéspontja lesz a keresett döféspont. Az 1. ábrában segédsíkul a ZY egyenesen átmenő és az adott a egyenessel párhuzamos síkot választottuk, amely az $[ab]$ és $[ac]$ triéder oldalakból a $ZB' \parallel a$ ill. $YC' \parallel a$ egyeneseket metszi ki. A 2. ábrában segédsík gyanánt az $A'ZY$ síkot választottuk, ahol A' az a egyenes egy tetszőleges pontja. Az $A'Z$ és $A'Y$ egyenesek metszik ki a b, ill. c egyenesekből a B', ill. C' pontokat. Mindkét esetben a $B'C'$ egyenes metszi ki a ZY-ból a D döféspontot. (Ha D nincs a végesben, vagyis $B'C' \parallel ZY$, akkor az X-hez illeszkedő BC oldal párhuzamos ZY-nal.)

Megjegyzés: Amíg a triéder minden élszöge 180°-nál kisebb, addig X, Y, Z nem lehetnek egy egyenesen, és az $[XYZ]$ sík nem mehet át P-n. Ez esetben tehát – az említett esettől eltekintve – egy és csakis egy megoldás van.

Ha a fenti feltétel nem áll fenn, vagyis az egyik szögtartomány nagyobb 180°-nál, akkor az XYZ pontok közül az, amelyik ebben a tartományban fekszik, a keresett háromszög oldalának meghosszabbításán van, tehát a szó szorosabb értelmében vett megoldás nincs.

b) Ha az adott a, b, c félegyenesek egy síkban vannak, akkor az adott ábra térbeli triéder párhuzamos vetületének fogható fel, és a szerkesztés változatlan marad a vetületben.

II. megoldás: A síkbeli eset térbeli meggondolások nélkül is megoldható, pl. Desargues tételének (lásd K. M. L. XII. 1. sz. 1956. január, 3. old.) felhasználásával.

Képzeljük a feladatot megoldottnak. A 2. ábrában az $ABC\Delta$, és $A'B'C'\Delta$, olyan helyzetűek, hogy a megfelelő pontok összekötései egy ponton, a P-n mennek át, tehát Desargues tétele szerint a megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak, vagyis az XY egyenesen lesz rajta a tetszőlegesen felvett A'-höz megszerkesztett $B'C'$ egyenesnek és a keresett BC egyenesnek D metszéspontja.

Makkai MihάLy (Bp. Eötvös J. g. III. o. t.)