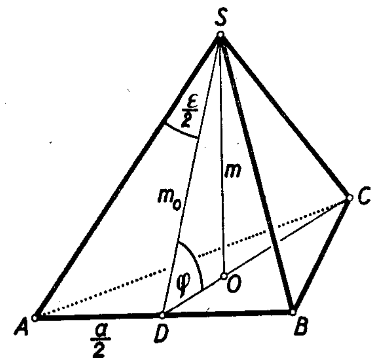
Legyen a szabályos 3 oldalú gúla alaplapja ABC, csúcspontja S, alapéle a. Az alaplap középpontját jelöljük O-val, akkor SO, a gúla magassága, merőleges az alaplap síkjára, tehát a $DOS\sphericalangle = 90°$ (lásd az ábrát).



Az $SD = m_0$ oldallap-magasság felezi az ε élszöget és a CD alaplap-magassággal bezárja a φ lapszöget.

Az ADS derékszögű háromszögből

(1) $$m_0 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2},$$

a DOS derékszögű háromszögből

(2) $$m_0 = \frac{OD}{\cos\varphi} = \frac{1}{3}\cdot DC\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi}.$$

(1) és (2) egybevetéséből következik, hogy

$$\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3\cos\varphi}, \qquad \text{vagyis} \qquad 3\cos\varphi = \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}.$$

Figyelembe véve a $\varphi = \varepsilon$ feltételt, mindkét oldalt négyzetre emelve nyerjük, hogy

$$3\cos^2\varepsilon = \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}.$$

Innen $\cos\varepsilon$-ra, a

$$3\cos^3\varepsilon + 3\cos^2\varepsilon + \cos\varepsilon = 1$$

harmadfokú egyenlet adódik.

Mindkét oldalt 9-cel szorozva

$$27\cos^3\varepsilon + 27\cos^2\varepsilon + 9\cos\varepsilon = 9.$$

Vegyük észre, hogy a bal oldal $3\cos\varepsilon + 1$ köbének első három tagja, tehát mindkét oldalhoz 1-et adva

$$(3\cos\varepsilon + 1)^3 = 10,$$

ahonnan

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt[3]{10}-1}{3} \sim 0{,}3848,$$

és így

$$\varepsilon = \varphi = 67°22'.$$