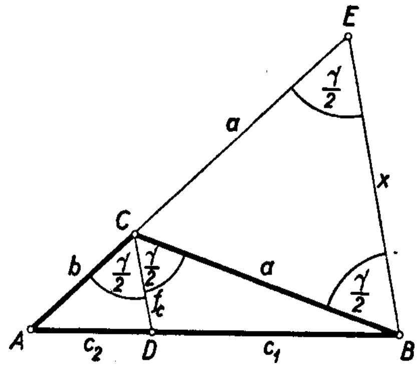
I. megoldás: Írjuk fel, hogy a háromszög területe egyenlő annak a két háromszög területének összegével, amelyre az f_c szögfelező osztja a háromszöget (lásd az ábrát):

$$af_c \sin\frac{\gamma}{2} + bf_c \sin\frac{\gamma}{2} = ab\sin\gamma.$$



Mindkét oldalt $abf_c \sin\frac{\gamma}{2}$-vel osztva ($\sin\frac{\gamma}{2}$ nyilván nem 0)

(2) $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_c}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{1}{f_c}\cdot 2\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ezek szerint (1) akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}.$$

Mivel szükségképpen $\frac{\gamma}{2}<90°$, azért $\frac{\gamma}{2}=60°$, és így

$$\gamma = 120°.$$

Eszerint (1) fennállásának *szükséges és elégséges* feltétele, hogy az f_c szögfelező által felezett szög 120°-os legyen.

Jáky Mária (Pécs, Bányaip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Az (1) alatti összefüggés így is írható

(3) $$f_c=\frac{ab}{a+b}.$$

A B csúcson át az f_c-vel párhuzamosan húzott egyenes messe az AC oldal meghosszabbítását E-ben (lásd ábrát). A keletkezett $BCE\Delta$-ben a B, ill. E csúcsoknál fekvő szögek, mint váltó-, ill. megfelelő szögek egyenlők $\frac{\gamma}{2}$-vel és így $CE=CB=a$. Nyilván $ADC\Delta\sim ABE\Delta$, és így

$$f_c : b = x : (a+b),$$

ahonnan

(4) $$f_c=\frac{bx}{a+b}.$$

(3) és (4) összevetéséből következik, hogy $x=a$, tehát a $BCE\Delta$ egyenlő oldalú, és így minden szöge, tehát $\frac{\gamma}{2}$ is 60°-os.

Győry Kálmán (Ózd, József Attila g. II. o. t.)